Dagsvik, John K. (2010): Elliptiske integraler I: En elementær gjennomgang av Abels addisjonsteorem. Normat – nordisk matematisk tidskrift, 58 (1), 6-34, 48

Title: **Elliptiske integraler I: En elementær gjennomgang av Abels addisjonsteorem**

Author: John K. Dagsvik

Version: **Forfatterens artikkelversjon (fagfellevurdert)**

Publisher: Nationellt centrum för matematikutbildning

26 februar 2010

Elliptiske integraler I: En elementær gjennomgang av Abels addisjonsteorem

av

John K. Dagsvik[1]

Sammendrag

En viktig del av Niels Henrik Abels forskning omhandlet teorien for elliptiske funksjoner og integraler. I denne teorien spiller såkalte addisjonsteoremer en sentral rolle. Abel gjorde som kjent helt fundamentale gjennombrudd på dette området. Formålet med denne artikkelen er å gi en en populær framstilling av Abels berømte addisjonsteorem. Artikkelen skiller seg fra andre oversiktsartikler og biografisk materiale ved at den tar sikte på en elementær framstilling av Abels bevis. Artikkelen inneholder i tillegg en kort gjennomgang av addisjonsteoremer utviklet på 1700 tallet, dvs. før Abel kom med sine bidrag.

[1] Forfatteren er seniorforsker ved Forskningsavdelingen, Statistisk sentralbyrå og Frisch-senteret for økonomisk forskning.
Takk til Olav Bjerkholt, Terje Skjerpen og Anders Rygh Swensen for nyttige kommentarer og påpeking av feil. En spesiell takk til Rune Johansen som har regnet igjennom mange av bevisene.

1. Innledning

Dette er den første, av to artikler, som behandler utvalgte deler av teorien for elliptiske funksjoner og integraler. Denne første artikkelen tar sikte på å gi en elementær framstilling av teorien for elliptiske integraler på 1700 tallet og i begynnelsen av 1800 tallet, med vekt på såkalte addisjonsteoremer. Det sentrale fokus er å gi en elementær framstilling av (en versjon) av Abels addisjonsteorem, med bevis, som kan leses av personer med matematikkbakgrunn som tilsvarer ca. ett års universitetsstudium. Grunnen til at også bidrag fra andre matematikere enn Niels Henrik Abel er tatt med, er for å belyse nivået på feltet, og dermed forhåpentlig gi et glimt av originaliteten ved Abels angrepsmåte. I den andre artikkelen (Dagsvik, 2009) er formålet å diskutere spesielle anvendelser av teorien for elliptiske funksjoner innen sannsynlighetsteori.

Det har tidligere vært skrevet en rekke oversiktsartikler om Abels vitenskapelige produksjon. Se for eksempel Aubert (1979a,b), Birkeland (1993), Eide (2009), Houzel (1986), Lange-Nielsen (1953), Skolem (1926), Størmer (1929). Disse artiklene har ulik vanskelighetsgrad, og noen krever matematikk-kunnskaper utover Bachelor-nivå. Felles for alle oversiktsartiklene – så langt undertegnede har funnet ut – er at de ikke har hatt pretensjoner om å gå i dybden når det gjelder de fundamentale ideene i bevisene til Abel. Hovedgrunnen til dette er antakelig at bevisene har blitt vurdert som for vanskelige for mange potensielt interesserte lesere. En medvirkende årsak kan også være at de fleste matematikere ved universitetene i moderne tid er trenet opp til å benytte et omfattende apparat av formalisme og begreper, som trolig er nødvendig for rigorøs bevisførsel, men som ofte virker som et effektivt hinder for "outsidere" som ønsker et innblikk i det underliggende idé-grunnlaget. Arbeidene til Sørensen (2004), og Houzel (2004), er mer dyptpløyende. Sørensen (2004) går til dels inn på ulike bevis, men uten å gi fullstendige detaljer. Houzel (2004) gir en grundig og svært kompakt gjennomgang (på engelsk) av Abels produksjon, men jeg er redd denne er altfor kompakt og avansert for de fleste lesere som ikke er profesjonelle matematikere. For eksempel skiller Houzels gjennomgang av Abels bevis av Teorem 1 i Abel (1829) seg ikke nevneverdig fra Abels opprinnelige bevis, bortsett fra at det er på engelsk mens Abels originale artikkel er på fransk.

Fra min tid som realfagstudent, husker jeg godt hvor kjedelig mange av de moderne lærebøkene i matematikk var, og som en følge av dette var, med noen unntak, undervisningen temmerlig traurig også. En vesentlig grunn til dette er at typiske framstillinger er ekstremt polerte, uten at det tas med noe om den historiske utvikling på feltet, og sjelden diskuteres det anvendelser, utover enkle sporadiske eksempler. Med unntak av fysikk, gjelder dette ikke bare lærebøker og undervisning i ren matematikk; det gjelder vel så mye for mer anvendte fag som bruker mye matematikk, slik som matematisk statistikk og matematisk økonomi. Det er i den sammenheng svært prisverdig at vi nå har fått eksempler på en annen type lærebok i matematikk, slik som Lindstrøm (2006).

Som antydet ovenfor har denne artikkelen som siktemål å bidra til å belyse sentrale idéer i en svært viktig utviklingsperiode i matematikken, ved å gi en elementær framstilling av et fundamentalt resultat som Abel oppnådde. Videre vil jeg forsøke å plassere Abels resultat i forhold til bidragene til betydningsfulle matematikere som arbeidet med elliptiske integraler på 1700 tallet og tidlig 1800 tall. Selv om Abel hadde ry på seg for å ha en elegant og klar framstillingsform synes ihvertfall undertegnede det er svært tungt å lese hans originalarbeider. Ifølge Kleiman (2004) er jeg visstnok ikke alene om å synes dette; flere matematikere på 1800 tallet klager over at de har vanskeligheter med dette stoffet.. Jeg håper artikkelen vil være inspirerende for matematikk-interesserte, som ikke nødvendigvis er profesjonelle matematikere. Det er naturligvis ikke mulig i en kort artikkel som dette å gi mer enn en summarisk oversikt over dette tema, blant annet fordi det egentlig er flere ulike versjoner av Abels addisjonsteorem. Her skal vi nøye oss med å diskutere den versjonen som er gitt i Teorem 1 i Abel (1829), og som kan betraktes som et spesialtilfelle av et mer generelt resultat, først formulert og bevist i den berømte Parisavhandlingen, Abel (1841). Den versjonen av Abels addisjonsteorem vi skal gjennomgå her har imidlertid den fordelen at den, i motsetning til det mest generelle resultatet, er uttrykt i helspesifiserte formler (som funksjon av gitte størrelser og funksjoner).

I likhet med undertegnede, er det sikkert mange som har vært fasinert av Abels liv og forskning. Noe av denne fasinasjonen har vel sammenheng med hans eksplosive talent, som oppsto uten forvarsel i en fattig utkant av Europa, og hans korte og dramatiske liv, samt tragiske endeligt. Men jeg tror denne fasinasjonen også har sammenheng med at en kun med elementær kjennskap til infinitesimalregning og likningsteori, er i stand til å forstå noe av problemstillingene Abel arbeidet med. For min egen del syns jeg utviklingen av teorien for elliptiske integraler og funksjoner på 1800-tallet er fascinerende, ikke minst på grunn av den kuriøse tilknytning til geometri og algebra.

2. Litt om elliptiske integraler på 1700 tallet

Begrepet elliptiske integraler stammer fra problemet med å beregne buelengden i en ellipse. Etter at Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) og Isaac Newton (1642-1727) hadde oppfunnet infinitesimalregningen, og Newton i tillegg hadde etablert lover for himmelmekanikken ga dette støtet til en rivende utvikling innen ren og anvendt matematikk, slik som mekanikk og sfærisk geometri (navigasjon). Siden Newton etablerte at planetene beveger seg i ellipsebaner rundt sola vil følgelig beregning av lengden av et stykke av jordbanen dermed tilsvare beregning av buelengden av en ellipse. Ifølge Hoffmann (1949) henvendte Leibniz seg til Newton og den engelske matematikeren James Gregory (1638-1675) i 1675 med spørsmål om de var i stand til å beregne buelengden av en ellipse. Han fikk som svar at dette problemet kunne de bare løse ved approksimasjon, men ikke eksakt. Leibniz trodde på det tidspunkt at han selv kunne løse dette problemet ved kjente metoder, men oppdaget senere at han hadde begått en feil. Det skulle bli den franske matematiker Joseph Liouville (1809-1882) som først beviste at elliptiske integraler ikke kan utrykkes ved elementære funksjoner.

Den franske matematikeren Adrien Marie Legendre (1752-1833) er den første matematikeren som har studert elliptiske integraler systematisk. Han har blant annet laget en klassifikasjon av elliptiske integraler.[2] Betegnelsen elliptisk integral benyttes for integraler av typen

$$\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{P(x)}},$$

der $R(x)$ er en rasjonal funksjon, dvs. $R(x) = Q_1(x)/Q_2(x)$ hvor $Q_1(x)$ og $Q_2(x)$ er polynomer, og $P(x)$ er et polynom av tredje eller fjerde grad. I sitt monumentale 3 binds verk, *Traité des fonctions elliptiques et des integrales eulériens,* som utkom i perioden 1825 til 1828, har Legendre, i tillegg til å behandle teorien for elliptiske integraler, også diskutert en rekke anvendelser i geometri og mekanikk. Videre har han presentert et omfattende bidrag i numerisk analyse som leder til praktiske approksimasjonsformler som kan brukes til å beregne numeriske verdier av ulike funksjoner, slik som for eksempel Gammafunksjonen og elliptiske integraler som funksjon av integrasjonsgrensene. I bind 2 av Legendres verk er det ca. 130 sider med tabeller beregnet med en presisjon på mellom 10 og 15 desimaler! På bakgrunn av at numeriske beregninger i vår tid er så lett, blir i alle fall undertegnede imponert over det arbeidet som er nedlagt i å lage disse tabellene. En del av resultatene som er presentert i Legendre (1825-1828) var tidligere publisert i Legendre (1793) og (1811-1817). Legendre har i bind I av *Traité des fonctions elliptiques et des integrales eulériens* vist at denne typen integraler alltid kan uttrykkes ved elementære funksjoner og integraler av tre typer, nemlig

$$\int \frac{dx}{\Delta(x)}, \quad \int \frac{\left(1+bx^2\right)dx}{\Delta(x)} \quad \text{og} \quad \int \frac{dx}{\left(1+nx^2\right)\Delta(x)},$$

der

(2.1) $$\Delta(x) = \sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)},$$

og der *b, k* og *n* er konstanter, og $|k| \le 1.$ Disse konstantene trenger imidlertid ikke å være reelle tall. I Legendres klassifikasjon kalles disse tre typene henholdsvis elliptiske integraler av første, andre og tredje slag.

---

[2] På Legendres tid var det vanlig å bruke betegnelsen elliptiske funksjoner om elliptiske integraler som funksjon av øvre integrasjonsgrense. I moderne terminologi bruktes betegnelsen elliptiske funksjoner i stedet om de korresponderende *inverse* funksjoner.

Eksempel 2.1:

I dette eksemplet er problemet å beregne buelengden av en ellipse. La oss kort gå igjennom hvordan dette gjøres. Vi husker at buelengden, $s(u,v)$, fra u til v til en deriverbar funksjon $y = f(x)$ kan beregnes ved formelen

(2.2) $$s(u,v) = \int_u^v \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

Vi minner videre om at ellipsen med parametre a og b kan beskrives ved

(2.3) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Fra (2.3) følger det ved å anvende formelen i (2.2) at

(2.4) $$s(u,v) = \frac{1}{a}\int_u^v \frac{a^4 + \left(b^2 - a^2\right)x^2}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)\left(a^4 + \left(b^2 - a^2\right)x^2\right)}}\, dx.$$

Integralet i (2.4) kan ikke "løses" i den forstand at det kan uttrykkes ved hjelp av elementære funksjoner. Vi ser at nevneren i (2.4) har form som kvadratroten av et polynom i fjerde grad. Altså er $s(u,\ v)$ et elliptisk integral.

Eksempel 2.2:

Et annet velkjent problem i mekanikken leder også til integraler av samme type som ovenfor. Betrakt problemet med å beregne svingetiden for en pendel. La g betegne tyngdens aksellerasjon, la l være pendelens lengde og la videre $\theta(t)$ være vinkelen mellom pendelsnora og den vertikale akse ved tid t. Det kan da vises (se for eksempel Stephenson, 1960) at dette problemet leder til følgende differensiallikning:

(2.5) $$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t).$$

Denne likningen kan vi nå benytte til å finne tiden, $t(\theta)$, det tar for pendelen å svinge fra vertikal posisjon til en posisjon med vinkel θ. Ved å multiplisere likningen i (2.5) med $2\theta'(t)$ får vi at

(2.6) $$2\theta''(t)\theta'(t) = -\frac{2g}{l}\sin(\theta(t))\theta'(t).$$

Vi gjenkjenner venstre side av (2.6) som den deriverte av $\theta'(t)$ og høyre side som den deriverte av $2\cos(\theta(t))g/l.$ Dette gir følgelig

(2.7) $$\theta'(t)^2 = 2k\cos\theta(t) + c,$$

der c er en konstant og $k = g/l$. Lar vi α betegne den største vinkelen mellom pendelsnora og den vertikale akse, dvs. vinkelen som tilsvarer at $\theta'(t) = 0$, får vi at $c = -2k\cos\alpha.$ Ved å løse differentiallikningen i (2.7) på implisitt form (og ved å foreta variableskiftet $x = \cos\theta(t)$) følger det at den implisitte løsningen kan skrives som

(2.8) $$t(\theta) = \int_0^{arc\cos\theta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(2kx - 2k\cos\alpha)}}.$$

Dette integralet kan heller ikke uttrykkes ved hjelp av elementære funksjoner. Vi ser at funksjonen under rottegnet i integranden i (2.8) er et polynom av tredje grad. Altså er dette integralet et elliptisk integral.

Eksempel 2.3:

Et tredje eksempel på elliptiske integraler får vi ved beregning av buelengden i lemniskaten. Lemniskaten har form som et liggende åtte-tall (eller uendelighets-symbolet ∞), og kan beskrives ved følgende sammenheng

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

eller med polarkoordinater gitt ved

(2.9) $$r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)},$$

der θ er vinkelen mellom x-aksen og radius $r(\theta)$ fra origo til kurven. Vi har at $x = r(\theta)\cos\theta$ og $y = r(\theta)\sin\theta$, hvilket gir, $dx = \left(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta\right)d\theta$ og $dy = \left(r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\right)d\theta$, slik at

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\,d\theta = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = \frac{d\theta}{r(\theta)}.$$

Altså er integralet for buelengden som korresponderer med at x løper fra 0 til z, gitt ved

$$\int_0^z \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \int_0^{\theta(z)} \frac{d\theta}{r(\theta)},$$

der $\theta(z)$ er vinkelen bestemt ved $z = r(\theta(z))\cos\theta(z) = \cos(\theta(z))\sqrt{\cos(2\theta(z))}.$ Ved variabelendringen $\theta \to r$ får vi at

$$dr = \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}d\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta = \frac{\sqrt{1-r^4}}{r}d\theta\ ,$$

hvilket gir

$$\int_0^{\theta(z)} \frac{d\theta}{r(\theta)} = \int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}},$$

der $u = \sqrt{\cos(2\theta(z))}.$ Det siste integralet er et spesialtilfelle av Legendres elliptiske integral av type I, som vi får ved å sette $k = \sqrt{-1}.$ I det følgende vil vi la $s(u)$ betegne buelengden for lemniskaten som funksjon av lengden u fra origo til et punkt på kurven i første kvadrant. Vi har da at

(2.10) $$s(u) = \int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

3. Addisjonsteoremer for elliptiske integraler før Abel

Med addisjonsteoremer mener vi setninger som viser at, og hvordan, en kan uttrykke summen av integraler med gitte integrasjonsgrenser som et integral av samme type med integrasjonsgrenser som er algebraiske funksjoner av de opprinnelige integrasjonsgrensene. Et enkelt eksempel på et addisjonsteorem er

(3.1a) $$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),$$

der

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Siden sinusfunksjonen er periodisk og kun er én-entydig i første kvadrant, er det hensiktsmessig å kun definere arcsin$x$ for x som gir vinkler i første kvadrant. Dette oppnås ved å la (3.1a) gjelde for $x^2 + y^2 \le 1,$ hvilket betyr at venstre side av (3.1a) blir mindre enn eller lik $\pi/2.$ Når derimot $x^2 + y^2 > 1,$ blir arcsin$x$ + arcsin$y$ > $\pi/2,$ og det er derfor hensiktsmessig i dette tilfelle å erstatte (3.1a) med

(3.1b) $$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Vi kan altså formulere addisjonsteoremet ovenfor ved kun å forholde oss til sammenhenger mellom vinkler og korresponderende sinusverdier i første kvadrant. Addisjonsteoremet i (3.1a,b) kan bevises ved å ta utgangspunkt i den velkjente formelen

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \tag{3.2}$$

der $u = \arcsin x$ og $v = \arcsin y$. Tilsvarende addisjonsteorem har en for integralet

$$\mathrm{arctgx} = \int_0^x \frac{du}{1+u^2},$$

nemlig at

$$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \tag{3.3}$$

for $xy < 1$, og en analog formel for $xy > 1$.

3.1. Resultater oppnådd av Fagnano og Euler

I 1718 fant visstnok den italienske greve Guilio Carlo Fagnano (1682-1766), (publisert i Fagnano, 1750), følgende bemerkelsesverdige sammenheng for buelengden til lemniskaten (jf. eksempel 2.2), nemlig

$$2s(x) = s\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right). \tag{3.4}$$

der $s(u)$ er definert i (2.8). Leonard Euler (1707-1783) fikk tilsendt arbeidene til Fagnano og ble selv inspirert til å arbeide med elliptiske integraler. Ifølge Sørensen (2004) kom arbeidene til Fagnano Euler i hende 23. desember 1751, og Carl Gustav Jacobi (1804-1851) har derfor kalt denne datoen for fødselsdatoen til elliptiske funksjoner. Vi merker oss at resultatet til Fagnano kan betraktes som en *invarians-egenskap* i den forstand at, på multiplikasjon av 2 nær, så er funksjonen $s(x)$ invariant under en bestemt ikke-lineær transformasjon av x. Denne invarians-egenskapen skal vi komme tilbake til senere. Fagnanos resultat i (3.4) er videre et spesialtilfelle innen teorien for transformasjoner av elliptiske funksjoner, som blant annet var et sentral tema i kappestriden mellom Abel og Jacobi. Euler (1756/7, 1761) viste at følgende addisjonsteorem gjelder

$$s(x) + s(y) = s\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right), \tag{3.5}$$

hvilket generaliserer (3.4), siden (3.5) impliserer (3.4) når $x = y$. I samme arbeid viste Euler at samme metode som benyttes til å vise (3.5) også kan benyttes til å vise addisjonsteoremer for mer generelle funksjoner $F(x)$ av formen

(3.6) $$F(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{P(u)}},$$

der $P(u)$ er et polynom av tredje eller fjerde grad. Vi skal nå vise hvordan Eulers bevis kan gjennomføres i et spesialtilfellet der $P(x) = a + bx^2 + cx^4$. Vi skal se at etableringen av det korresponderende addisjonsteoremet til (3.5) kan oppnås ved å løse differensiallikningen

(3.7) $$\frac{y'}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}},$$

der y er lik en ukjent funksjon av x, og der ε er lik 1 eller -1. Her skal vi nøye oss med å gjengi Eulers bevis for tilfellet $\varepsilon = 1$. Tilsvarende bevis kan gjennomføres for $\varepsilon = -1$. Med $\varepsilon = 1$ blir likningen i (3.7) ekvivalent med

(3.8) $$F(y) = F(x) + C,$$

der C er en integrasjonskonstant som er bestemt ved $C = F(f(0))$, og funksjonen $F(x)$ er det korresponderende integralet i (3.6) når $P(x) = a + bx^2 + cx^4$. Eulers bevis har karakter av *verifikasjon*, dvs. han gjettet på at løsningen av (3.7/3.8) kan skrives implisitt på formen

(3.9) $$\alpha(x^2 + y^2) = 2\beta xy + \gamma x^2 y^2 + \delta,$$

der α, β, γ og δ er nærmere bestemte konstanter. Vi skal nå vise dette. Ved å ta differensialet av (3.9) får vi at

(3.10) $$\alpha(xdx + ydy) = \beta(xdy + ydx) + \gamma(xy^2 dx + x^2 ydy),$$

som er ekvivalent med

(3.11) $$(\alpha x - \beta y - \gamma xy^2)dx + (\alpha y - \beta x - \gamma x^2 y)dy = 0.$$

Dersom vi løser likningen i (3.9) med hensyn på henholdsvis x og y får vi at

(3.12a) $$x = \frac{\beta y + \sqrt{\alpha\delta + (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta)y^2 + \alpha\gamma y^4}}{\alpha - \gamma y^2},$$

og

(3.12b) $$y = \frac{\beta x - \sqrt{\alpha\delta + (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta)x^2 + \alpha\gamma x^4}}{\alpha - \gamma x^2}.$$

Som kjent er det egentlig fire mulige løsninger her. Det er imidlertid et poeng at blant disse løsninger velges den største roten for x og den minste roten for y. Dette skyldes at vi har valgt å se på tilfellet $\varepsilon = 1.$ Fra disse likningene følger det ved å multiplisere med de respektive nevnerne i (3.12a,b) at

(3.13a) $$\alpha x - \beta y - \gamma x y^2 = \sqrt{\alpha\delta + (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta)y^2 + \alpha\gamma y^4},$$

og

(3.13b) $$\alpha y - \beta x - \gamma x^2 y = -\sqrt{\alpha\delta + (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta)x^2 + \alpha\gamma x^4}.$$

Ved innsetting av (3.13a,b) i (3.11) får vi at

(3.14) $$\frac{y'}{\sqrt{\alpha\delta + (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta)y^2 + \alpha\gamma y^4}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\delta + (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta)x^2 + \alpha\gamma x^4}},$$

hvilket viser at relasjonen i (3.9) faktisk representerer en løsning av (3.7). For å forenkle er det hensiktsmessig å innføre notasjonen

$$z^2 = \delta / \alpha, \;\; bz^2 / a = (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma\delta) / \alpha^2, \;\; cz^2 / a = \gamma / \alpha,$$

der z er en vilkårlig størrelse som vi foreløpig betrakter kun som en konstant. Ved å innføre denne notasjonen i (3.14) får vi eksakt samme uttrykk som i (3.7). Videre får vi at (3.9) kan uttrykkes som

(3.15) $$ax^2 + ay^2 = az^2 + cz^2x^2y^2 + 2xy\sqrt{a(a + bz^2 + cz^4)}.$$

Ved å løse (3.15) med hensyn på y får vi (ved passende valg mellom to mulige løsninger) at

(3.16) $$y = \frac{x\sqrt{a(a + bz^2 + cz^4)} + z\sqrt{a(a + bx^2 + cx^4)}}{a - cz^2x^2}.$$

Ved å sette $x = 0$, finner vi fra (3.16) at $C = F(f(0)) = F(z)$. Ovenfor har vi betraktet z som en konstant, men siden sammenhengene ovenfor gjelder for enhver verdi av z kan vi betrakte den som en variabel. Fra (3.16) og (3.8) får vi derfor at

$$(3.17) \qquad F\left(\frac{x\sqrt{a(a+bz^2+cz^4)}+z\sqrt{a(a+bx^2+cx^4)}}{a-cz^2x^2}\right)=F(x)+F(z).$$

Vi konstaterer at likningen i (3.5) er et spesialtilfelle av (3.17). Dersom vi innsetter $a=1\,, b=-(1+k^2)$ og $c=k^2$, reduserer addisjonsresultatet i (3.17) seg til

$$(3.18) \qquad F\left(\frac{x\Delta(z)+z\Delta(x)}{1-k^2z^2x^2}\right)=F(x)+F(z).$$

Dersom vi setter $z = x$ inn i (3.17) eller i (3.18), ser vi at vi får en generalisering av invarians-relasjonen til Fagnano i (3.4). Med tilsvarende teknikk viste Euler at en kan finne addisjonsteoremer for tilfellet der $P(x)$ er et generelt fjerdegradspolynom. Videre demonstrerer Euler at samme teknikk kan benyttes til å løse differensiallikninger av formen

$$(3.19) \qquad \frac{my'}{\sqrt{P(y)}}=\frac{n}{\sqrt{P(x)}},$$

der m og n er hele tall og $P(x)$ er et generelt fjerdegradspolynom i x.

3.2. Lagranges tilnærming

Joseph Louis (Giuseppe Lodovico) Lagrange (1736-1813) introduserte en metode til å løse visse typer differensiallikninger som kan benyttes (konstruktivt) til å finne løsning av differensiallikninger av typen (3.7), i den forstand at en ikke trenger å kjenne til klassen av potensielle løsninger, slik som tilfellet er med metoden til Euler. Vi skal nå gi en kort beskrivelse av Lagranges metode. Framstillingen her bygger i vesentlig grad på Cayley (1876/1961), som ikke avviker i vesentlig grad fra framstillingen hos Lagrange (1766-1769).

Vi tar utgangspunkt i likningen (3.7) med $\varepsilon = 1$. Lagranges triks er å innføre en ny variabel t, definert ved

$$(3.20) \qquad t=\int_0^x \frac{du}{\sqrt{a+bu^2+cu^4}}.$$

Fra (3.7) har vi at

(3.21)
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a + by^2 + cy^4}{a + bx^2 + cx^4}}.$$

Videre får vi fra (3.20) og (3.21) at

(3.22a)
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{a + bx^2 + cx^4}$$

og

(3.22b)
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{a + by^2 + cy^4}.$$

Ved å derivere likningen i (3.22a) med hensyn på *t*, finner vi at

(3.23)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(dx/dt)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{a + bx^2 + cx^4}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{2bx + 4cx^3}{2\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} \cdot \sqrt{a + bx^2 + cx^4} = bx + 2cx^3.$$

Tilsvarende får vi fra (3.22b) at

(3.24)
$$\frac{d^2y}{dt^2} = by + 2cy^3.$$

Videre er det hensiktsmessig å innføre funksjonene $p = x + y$, og $q = x - y$, hvilket medfører at

(3.25)
$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = bp + \frac{c}{2}(p^3 + 3pq^2),$$

og

(3.26)
$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = b(x^2 - y^2) + c(x^4 - y^4)$$

$$= bpq + \frac{c}{2}pq(p^2 + q^2).$$

Fra (3.25) og (3.26) følger det nå at

$$q\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=bpq+\frac{c}{2}(p^3q+3pq^3)-bpq-\frac{c}{2}p^3q-\frac{c}{2}pq^3)=cpq^3. \tag{3.27}$$

Ved å dividere begge sider i (3.27) med q^3 og multiplisere med $2\,dp/dt$, får vi at

$$\frac{2}{q^2}\cdot\frac{d^2p}{dt^2}\cdot\frac{dp}{dt}-\frac{2}{q^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\cdot\frac{dq}{dt}=2cp\cdot\frac{dp}{dt}. \tag{3.28}$$

Likningen i (3.28) kan integreres, hvilket gir

$$\frac{1}{q^2}\cdot\left(\frac{dp}{dt}\right)^2=cp^2+K, \tag{3.29}$$

der K er en vilkårlig konstant. Den letteste måte å verifisere dette på er å derivere likningen i (3.29). Setter vi inn for *p, q* og *dp/dt* i (3.29) fra likningene i (3.22a,b) finner vi at

$$\left(\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}+\sqrt{a+by^2+cy^4}}{x-y}\right)^2=c(x+y)^2+K. \tag{3.30}$$

Likningen i (3.30) gir sammenhengen mellom *x* og *y* på implisitt form. Vi kan imidlertid forenkle denne likningen betydelig. Etter litt regning og ved å multiplisere likningen i (3.30) med $(y-x)^2$ får en etter litt reorganisering, at

$$2\sqrt{(a+bx^2+cx^4)(a+by^2+cy^4)}=(y-x)^2(K+(x+y)^2c)-2a-b(x^2+y^2)-c(x^4+y^4). \tag{3.31}$$

Ved å kvadrere begge sider i (3.31) får en videre at

$$\begin{aligned}0&=\left((y-x)^2(K+(x+y)^2c)-2a-b(x^2+y^2)-c(x^4+y^4)\right)^2-4(a+bx^2+cx^4)(a+by^2+cy^4)\\&=(b^2-4ac)(y^2-x^2)^2+K^2(y-x)^4-2bK(y-x)^2(x^2+y^2)-4aK(y-x)^2-4cK(y-x)^2x^2y^2.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Vi ser at høyre side av likningen i (3.32) har $(y-x)^2$ som faktor. Etter å ha dividert med denne faktoren, og etter litt regning, finner en at relasjonen i (3.30) kan uttrykkes som

(3.33) $$\alpha(x^2 + y^2) = 2\beta xy + \gamma x^2 y^2 + \delta,$$

der

$$\delta = 4aK,\ \ \beta = 4ac - b^2 + K^2,\ \ \gamma = 4cK \text{ , og } \ \alpha = K^2 - 4ac + b^2 - 2bK.$$

Vi konstaterer at likningen i (3.33) er av samme type som likningen i (3.9), hvilket er den som Euler gjettet på. Dette betyr at det ikke finnes andre løsninger av Eulers differensiallikning i (3.7) enn den Euler fant.

3.3. Resultater oppnådd av Legendre

Som nevnt ovenfor, er det Legendre som mest systematisk og omfattende har arbeidet med elliptiske integraler før Abel og Jacobi. I første bind av Legendres hovedverk, kapittel 6, gir han to bevis for addisjonsteoremet for elliptiske intetgraler. Her skal vi gjengi det første. På side 19, starter han med å vise til Eulers differensiallikning, som er ekvivalent med (3.8). Ved metoder som Legendre hadde utviklet og beskrevet i samme bind følger det at vi kan transformere likningen i (3.8) til en likning som er en sum av elliptiske integraler av *første slag*, dvs. at $\sqrt{P(x)} = \Delta(x).$ Med $\varepsilon = -1$ og ved å innføre substitusjonen $x = \sin\varphi$ og $y = \sin\psi,$ får vi at den analoge likningen til (3.8) kan skrives som

(3.34) $$G(\psi) + G(\varphi) = C,$$

der

$$G(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}},$$

der ψ er en ukjent funksjon $\psi(\varphi)$ av φ og C en konstant som bestemmes ved $G(\psi(0)) = C.$ Problemet er nå å løse (3.34), dvs. å finne ψ som funksjon av φ slik at (3.34) er oppfylt.

På samme måte som Euler går Legendres bevis ut på å "gjette" på en løsning og deretter vise at denne tilfredsstiller (3.34). Nærmere bestemt påstår Legendre at sammenhengen mellom ψ og φ er gitt ved

(3.35) $$\cos\varphi\cos\psi - \cos\mu = \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu}\ ,$$

der μ er en vilkårlig konstant. Deretter viser han at dette stemmer. Vi skal nå rekapitulere hans bevis. Likningen i (3.35) er ekvivalent med de to følgende likningene

(3.36) $$\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi = \sin\mu\sin\varphi\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$$

og

(3.37) $$\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi = \sin\mu\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\ .$$

Den enkleste måten å verifisere at (3.35), (3.36) og (3.37) er ekvivalente, er å kvadrere begge sider av likningene i (3.36) og (3.37), og deretter foreta en passende reorganisering.

Ved å dividere (3.35) med $\sin\varphi\sin\psi$ og deretter derivere får en at

$$\frac{1}{\sin\varphi}(\cos\psi - \cos\mu\cos\varphi) + \frac{d\psi/d\varphi}{\sin\psi}(\cos\varphi - \cos\mu\cos\psi) = 0\ .$$

Ved å benytte (3.36) og (3.37) får vi videre at

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\cdot\sin\mu\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} + \frac{d\psi}{\sin\psi}\cdot\sin\mu\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 0,$$

hvilket reduserer seg til

(3.38) $$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

som er ekvivalent med (3.34). For å bestemme C (ekvivalent med å bestemme μ) får vi fra (3.35) at når $\varphi = 0$, blir $\psi(0) = \mu$, slik at $C = G(\mu)$. Altså har vi vist at

(3.39) $$G(\psi) + G(\varphi) = G(\mu).$$

Betrakter vi i stedet μ som funksjon av φ og ψ, bestemt ved (3.36) og (3.37), kan vi etablere addisjonsteoremer ved å løse likningene (3.36) og (3.37) med hensyn på μ. Dette gir

(3.40) $$\sin\mu = \frac{\sin\varphi\cos\psi\Lambda(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Lambda(\varphi)}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

(3.41) $$\cos\mu = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\Lambda(\varphi)\Lambda(\psi)}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

og

(3.42) $$tg\mu = \frac{tg\varphi\Lambda(\psi) + tg\psi\Lambda(\varphi)}{1 - tg\varphi tg\psi\Lambda(\varphi)\Lambda(\psi)},$$

der

$$\Lambda(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\ .$$

Sammen med likningen i (3.39) gir altså (3.40) til (3.42) tre ulike versjoner av Legendres addisjonsteorem. Ved passende transformasjoner er det for eksempel lett å vise at (3.18) er ekvivalent med (3.39) og (3.40). For å vise dette, la oss skifte tilbake til de opprinnelige variable ved å foreta variabeltransformasjonene $\varphi \to x$ og $\psi \to y$, der $\varphi = \arcsin x$ og $\psi = \arcsin y.$ Dermed blir $G(\varphi) = F(\sin\varphi) = F(x),\ G(\psi) = F(\sin\psi) = F(y)$ og $G(\mu) = F(\sin\mu),$ der funksjonen F har samme form som i (3.18). Alså kan vi skrive (3.39) som $F(x) + F(y) = F(\sin\mu).$ Videre blir (3.40) uttrykt ved x og y lik

(3.43)
$$\sin\mu = \frac{x\Delta(y) + y\Delta(x)}{1 - k^2x^2y^2},$$

som viser at resultatet i (3.39) og (3.40) er ekvivalent med resultatet i (3.18).

Legendre gjennomførte også et annet alternativt bevis der han viste at sammenhengene i (3.34) til (3.37) følger fra sfærisk trigonometri, nærmere bestemt sammenhengene mellom sidene i en trekant på en kuleflate med respektive lengder $\varphi,\ \psi$ og $\mu.$ I tillegg til å ha selvstendig interesse er dette alternative beviset også en god illustrasjon på hvordan problemstillinger i sfærisk geometri leder til elliptiske integraler.

Her bør det også nevnes at den engelske matematiker John Landen (1719-1790) oppnådde en løsning av differensiallikningen i (3.38), publisert i Landen (1775/1780), ved å benytte tilsvarende geometriske betraktninger som Legendre benyttet senere. Jeg viser til Cayley (1876/1961) som gjennomgår Landens teorem. Imidlertid ser det ikke ut til at han eksplisitt etablerte et addisjonsteorem.

4. Bevis av Teorem 1 i Abels artikkel "Précis d'une théorie des fonctions elliptiques"

Vi går nå over til å se på Abels tilnærming. Vår gjennomgang av addisjonsteoremer oppnådd før Abel i kapittlene ovenfor gjør oss i stand til å plassere Abels bidrag i den historiske sammenheng og å få fram på hvilken måte Abels metode skiller seg de metodene vi har gjennomgått ovenfor. Vi skal diskutere beviset av Teorem 1 i artikkelen ”Précis d’une théorie des fonctions elliptiques”, som ble publisert i *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* (Crelle’s journal) i 1829, og som også finnes på side 529 i Abels samlede verker utgitt av Sylow og Lie (1881). Videre skal vi diskutere noen implikasjoner som følger fra dette teoremet.

Abel begynner sin artikkel med følgende innledende bemerkninger (oversatt fra fransk):

” Teorien for elliptiske funksjoner, skapt av herr Legendre, utgjør en av de mest interessante delene av analysen. I løpet av mitt arbeid med å utvikle denne teorien har jeg, om jeg ikke tar feil,

kommet fram til en rekke resultater som synes meg å fortjene en viss oppmerksomhet. Framfor alt har jeg forsøk å oppnå en mest mulig generell utforming av mine resultater, ved å ta utgangspunkt i problemstillinger av en meget vid utstrekning. Om jeg ikke har vært helt heldig med å gi en fullstendig løsning på disse, har jeg i det minste foreslått framgangsmåter som kan benyttes i så øyemed. Resultatene av min forskning på dette feltet utgjør et verk av noe omfang, men omstendighetene tillater meg ikke å publisere dette ennå. Det er derfor jeg her vil gi en klargjøring av metoden som jeg har fulgt, sammen med meget generelle resultater som denne har ledet meg til...."

Vi ser fra disse innledende setningene i Abels artikkel at selv om Abel uttrykker seg beskjedent, kommer det tydelig fram at han er opptatt av å sette seg generelle og ambisiøse mål med sikte på å trenge inn i kjernen av problemet.

Før vi formulerer Abels Teorem 1 vil det forenkle framstillingen å innføre noen begreper og definisjoner først. La $f(x)$ være et polynom i x med like potenser og $\varphi(x)$ et polynom i x med odde potenser, eller vice versa. La videre $\Delta(x)$ være gitt som ovenfor ved (2.1), dvs.

$$\Delta(x) = \sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)},$$

der vi husker at k er en konstant med tallverdi mindre enn eller lik 1.Vi ser lett at

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 \Delta(x)^2$$

blir et polynom i x^2, hvilket betyr at vi kan skrive

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 \Delta(x)^2 = A(x^2 - x_1{}^2)(x^2 - x_2{}^2)...(x^2 - x_m{}^2), \tag{4.1}$$

der A er en konstant, $x_1, -x_1, x_2, -x_2, ..., x_m, -x_m$, er røttene i polynomet hvor graden er gitt ved $2m$. For enkelhets skyld antar vi i denne framstillingen av de etterfølgende bevisene av Abels resultater at røttene er reelle og har tallverdi mindre enn 1. Vi har altså at dersom x_j er en rot i (4.1) er også $-x_j$ en rot i (4.1). Vi definerer x_j som den roten som tilfredsstiller

$$f(x_j) + \varepsilon_j \varphi(x_j) \Delta(x_j) = 0, \tag{4.2}$$

der ε_j er valgt lik 1 eller lik -1. Dette er mulig fordi (4.1) medfører at

$$f(x_j) + \varphi(x_j)\Delta(x_j) = 0 \text{ eller } f(x_j) - \varphi(x_j)\Delta(x_j) = 0.$$

I sin artikkel i Crelle's journal (1829) har Abel bevist følgende teorem:[3]

Teorem 1

La $f(x)$ *og* $\varphi(x)$ *være polynomer i x med henholdsvis like og odde potenser, eller vice versa. Da har vi at*

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \int_s^{x_j} \frac{dx}{(1-(x/a)^2)\Delta(x)} = C - \frac{a}{2\Delta(a)} \log\left(\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta(a)}{f(a)-\varphi(a)\Delta(a)}\right), \tag{4.3}$$

der $x_1, x_2, ..., x_m$, *er de røttene i* (*4.1*) *som tilfredsstiller* $f(x_j)+\varepsilon_j\varphi(x_j)\Delta(x_j)=0$, *og a er en konstant slik at* $|x_j| < \min(1,a)$, *for j = 1,2,...,m, s er en vilkårlig konstant med tallverdi mindre enn 1, og C en konstant avhengig av s og a, men uavhengig av røttene* $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$.

Før vi går løs på Abels bevis trenger vi følgende hjelpesetninger:

Lemma 1

La $g_1(x)$ *og* $g_2(x)$ *være polynomer der* $g_1(x)$ *har odde potenser,* $g_2(x)$ *har like potenser og høyere grad enn* $g_1(x)$. *Videre er alle røttene i* $g_2(x)$ *ulike, og forskjellige fra røttene i* $g_1(x)$. *La 2m være graden til* $g_2(x)$, *og la* $x_1, -x_1, x_2, -x_2, ..., x_m, -x_m$, *være røttene i* $g_2(x)$. *For en fri variabel x som er forskjellig fra* x_j, *for alle j, har vi at*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{2ag_1(x_j)}{(a^2-x_j^2)g_2'(x_j)} = \frac{g_1(a)}{g_2(a)}, \tag{4.4}$$

der a er en vilkårlig konstant som er ulik alle røttene.

Resultatet i Lemma 1 er velkjent, men for fullstendighetens skyld er beviset gjengitt i vedlegg.

Lemma 2

La $q(x)$ *og* $h(x)$ *være to deriverbare funksjoner og K en konstant. Da er*

(*4.5*) $$\int \frac{(q(x)h'(x)-h(x)q'(x))dx}{h(x)^2-q(x)^2K}=C-\frac{1}{2K}\log\left(\frac{h(x)+q(x)K}{h(x)-q(x)K}\right),$$

der C er en vilkårlig konstant.

Beviset av Lemma 2 følger umiddelbart ved å derivere høyre side m.h.p. *x*.

Bevis av Teorem 1:

I tillegg til at polynomene f og φ er funksjoner av *x*, betrakter Abel dem også som funksjoner av koeffisientene, der koeffisientene antas å være frie variable. La nå *z* betegne en av disse koeffisientene. Vi skriver heretter $f(x,z)$ og $\varphi(x,z)$ for å betegne at f og φ nå er å betrakte som funksjoner av både *x og z*. Tilsvarende, la $\psi(x,z)$ være funksjonen definert ved

(4.6) $$\psi(x,z)=f(x,z)^2-\varphi(x,z)^2\Delta(x)^2.$$

Som funksjon av *z* betegner vi nå røttene i (4.6) med $r_j(z), -r_j(z)$, j = 1, 2,…, *m*. Disse røttene blir nå såkalte algebraiske funksjoner av *z*.[4] Ved å derivere $\psi\left(r_j(z),z\right)$ m.h.p. *z*, får vi at

(4.7) $$\psi_1'\left(r_j(z),z\right)r_j'(z)+\psi_2'\left(r_j(z),z\right)=0,$$

der ψ_k' betegner den deriverte m.h.p. *k*-te argument, for *k* = 1,2. Ved å legge merke til at $\Delta(x)$ ikke avhenger av *z* får vi videre fra (4.6) ved å derivere m.h.p. *z* at

(4.8) $$\psi_2'\left(x,z\right)=2f\left(x,z\right)f_2'\left(x,z\right)-2\Delta(x)^2\varphi\left(x,z\right)\varphi_2'\left(x,z\right).$$

La oss for enkelhets skyld innføre notasjonen

(4.9) $$\theta\left(x,z\right)=\varphi\left(x,z\right)f_2'\left(x,z\right)-f\left(x,z\right)\varphi_2'\left(x,z\right).$$

Fra (4.2) følger det at

---

[3] Abels teorem presentert i denne artikkelen skiller seg noe fra Abels formulering, i og med at vi her nøyer oss med å gjengi addisjonsteoremet for elliptiske integraler av tredje slag. Det tilsvarende resultatet for ellliptiske integraler av første slag følger i Korollar 2.

[4] Her tar Abel det ikke så nøye at x_j er algebraiske funksjoner som generelt er flertydige med forgreiningspunkter. For eksempel har funksjonen gitt ved $y^2=z+a$ et forgreiningspunkt i $z=-a$.

(4.10a) $$f\left(r_j(z),z\right)=-\varepsilon_j\Delta\left(r_j(z)\right)\varphi\left(r_j(z),z\right),$$

som, siden $\Delta\left(r_j(z)\right)\neq 0,$ er ekvivalent med

(410b) $$\varphi\left(r_j(z),z\right)=-\varepsilon_j\,\frac{f\left(r_j(z),z\right)}{\Delta\left(r_j(z)\right)}.$$

Ved å sette inn for $f(r_j(z),z)$ fra (4.10a) og for $\varphi(r_j(z),z)$ fra (4.10b) i (4.8), følger det at

(4.11) $$\begin{aligned}\psi_2'\left(r_j(z),z\right)&=2f\left(r_j(z),z\right)f_2'\left(r_j(z),z\right)-2\Delta(r_j(z))^2\varphi\left(r_j(z),z\right)\varphi_2'\left(r_j(z),z\right)\\&=-2\varepsilon_j\Delta\left(r_j(z)\right)\theta\left(r_j(z),z\right),\end{aligned}$$

som sammen med (4.7) gir

(4.12) $$\psi_1'\left(r_j(z),z\right)r_j'(z)=2\varepsilon_j\Delta\left(r_j(z)\right)\theta\left(r_j(z),z\right).$$

Ved å dividere (4.12) med

$$\psi_1'\left(r_j(z),z\right)\left(1-r_j(z)^2\big/a^2\right)\Delta(r_j(z))/\varepsilon_j\,,$$

får vi at

(4.13) $$\frac{\varepsilon_j r_j'(z)}{\left(1-\left(\dfrac{r_j(z)}{a}\right)^2\right)\Delta\left(r_j(z)\right)}=\frac{2\theta\left(r_j(z),z\right)}{\left(1-\left(\dfrac{r_j(z)}{a}\right)^2\right)\psi_1'\left(r_j(z),z\right)}.$$

Vi legger merke til at $\varphi(x,z)f_2'(x,z)$ og $f(x,z)\varphi_2'(x,z)$ er polynomer i x med odde potenser slik at $\theta(x,z)$ blir et polynom i x med odde potenser. Videre husker vi at $\psi(x,z)$ er et polynom i x med like potenser. Det er lett å sjekke at graden av $\theta(x,z)$ (som polynom i x) er mindre enn graden av $\psi(x,z)$. Fra (4.13) og Lemma 1, med $g_1(x)=\theta(x,z)$ og $g_2(x)=\psi(x,z),$ får vi derfor at

(4.14) $$\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon_j r_j'(z)}{(1-(r_j(z)/a)^2)\Delta\left(r_j(z)\right)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{2a^2\theta\left(r_j(z),z\right)}{\left(a^2-r_j(z)^2\right)\psi_1'\left(r_j(z),z\right)}=\frac{a\theta\left(a,z\right)}{\psi\left(a,z\right)}\,.$$

Ved å integrere (4.14) med hensyn på z fra z_0 til z_1, for passende valg av z_0 og z_1, og videre benytte Lemma 2, med $q(z) = \varphi(a,z)$, $h(z) = f(a,z)$ og $K = \Delta(a)$, får vi at

(4.15)
$$\sum_{j=1}^{m} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\varepsilon_j r_j'(z)dz}{(1-(r_j(z)/a)^2)\Delta(r_j(z))} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{a\theta(a,z)dz}{\psi(a,z)}$$

$$= \frac{a}{2\Delta(a)} \log\left(\frac{f(a,z_0)+\varphi(a,z_0)\Delta(a)}{f(a,z_0)-\varphi(a,z_0)\Delta(a)}\right) - \frac{a}{2\Delta(a)} \log\left(\frac{f(a,z_1)+\varphi(a,z_1)\Delta(a)}{f(a,z_1)-\varphi(a,z_1)\Delta(a)}\right).$$

For en gitt verdi av j, får vi ved å foreta variabelskiftet $r_j(z) \to x$, at $r_j'(z)dz = dx$, og at

(4.16)
$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{r_j'(z)dz}{(1-(r_j(z)/a)^2)\Delta(r_j(z))} = \int_{s_j}^{x_j} \frac{dx}{(1-(x/a)^2)\Delta(x)} = \int_{s}^{x_j} \frac{dx}{(1-(x/a)^2)\Delta(x)} + C_j,$$

der $x_j = r_j(z_1)$, $s_j = r_j(z_0)$, s er en (passende) vilkårlig konstant og C_j en konstant som er gitt ved

$$C_j = \int_{s_j}^{s} \frac{dx}{(1-(x/a)^2)\Delta(x)}.$$

Kombinerer vi (4.16) med (4.15) får vi at

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{s}^{x_j} \frac{\varepsilon_j dx}{(1-(x/a)^2)\Delta(x)} = C - \frac{a}{2\Delta(a)} \log\left(\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta(a)}{f(a)-\varphi(a)\Delta(a)}\right),$$

der $f(a) = f(a,z_1)$, $\varphi(a) = \varphi(a,z_1)$, og C er en konstant gitt ved

$$C = -\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j C_j - \frac{a}{2\Delta(a)} \log\left(\frac{f(a,z_0)+\varphi(a,z_0)\Delta(a)}{f(a,z_0)-\varphi(a,z_0)\Delta(a)}\right).$$

Her er det altså underforstått at $f(a)$ og $\varphi(a)$ er funksjoner av røttene $\{x_j\}$. Dermed er påstanden i Teorem 1 bevist for tilfellet der alle røttene i (4.2) er forskjellige. Siden koeffisientene i et polynom er lineærkombinasjoner av produkter av røttene i polynomet blir polynomet en kontinuerlig funksjon av røttene. Derfor er begge sider av likningen i (4.3) kontinuerlige funksjoner av røttene, dersom røttene er forskjellige fra a. Men da må (4.3) gjelde også når noen av røttene er like. Dette innser vi ved å la for eksempel x_1 nærme seg x_2.

Q.E.D.

Fra Teorem 1 følger det nå umiddelbart:

Korollar 1

La $x_j, j = 1, 2, ..., m,$ *være gitte størrelser og a en konstant slik at* $|x_j| < \min(1, a),$ *og la polynomene* $f(x)$ *og* $\varphi(x)$ *være bestemt slik at* $x_1, -x_1, x_2, -x_2, ..., x_m, -x_m,$ *er røttene i* $f(x)^2 - \varphi(x)^2 \Delta(x)^2$. *Da gjelder konklusjonen i Teorem 1.*

Resultatet i Korollar 1 er av betydelig interesse fordi det viser at vi kan velge røtter først og deretter tilpasse de respektive polynomer $f(x)$ og $\varphi(x)$ konsistent med de valgte røttene.

Fra Teorem 1 kan vi uten større vanskelighet bevise neste resultat.

Korollar 2

Under forutsetningene i Teorem 1 har vi at

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \int_s^{x_j} \frac{dx}{\Delta(x)} = C, \tag{4.17}$$

der C er en passende konstant.

Bevis av Korollar 2:

Vi skal betrakte spesialtilfellet som følger fra (4.3) når $a \to \infty$. Siden

$$\frac{1}{\left|1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right| |\Delta(x)|} < \frac{1}{|\Delta(x)|},$$

når a er stor og x er begrenset til et endelig intervall følger det (jf. Lebesgues monotone konvergensteorem) at

$$\lim_{a \to \infty} \int_s^{x_j} \frac{dx}{(1 - (x/a)^2)\Delta(x)} = \int_s^{x_j} \frac{dx}{\Delta(x)}.$$

La oss dernest betrakte høyre side i (4.3) når $a \to \infty$. Anta først at graden av $f(x)^2$ er mindre enn graden til polynomet $(\varphi(x,z)\Delta(x))^2$. Vi kan skrive

$$\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta(a)}{f(a)-\varphi(a)\Delta(a)} = \frac{\dfrac{f(a)}{\varphi(a)\Delta(a)}+1}{\dfrac{f(a)}{\varphi(a)\Delta(a)}-1}.$$

Siden $f(x)^2$ har lavere grad enn $(\varphi(x)\Delta(x))^2$, vil opplagt

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)\Delta(a)} \to 0,$$

når a går mot uendelig. Dermed vil

$$\log\left(\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta(a)}{f(a)-\varphi(a)\Delta(a)}\right) \to \log(-1) = \pi\sqrt{-1},$$

når a går mot uendelig.[5] Videre vil

$$\frac{a}{\Delta(a)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-a^{-2}\right)\left(c^2a^2-1\right)}} \to 0,$$

når a går mot uendelig, slik at

$$\frac{a}{\Delta(a)}\log\left(\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta(a)}{f(a)-\varphi(a)\Delta(a)}\right) \to 0,$$

når a går mot uendelig. Tilsvarende, hvis $f(x)^2$ har høyere grad enn $(\varphi(x)\Delta(x))^2$, følger det på samme måte som ovenfor at

$$\frac{a}{\Delta(a)}\log\left(\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta(a)}{f(a)-\varphi(a)\Delta(a)}\right) \to 0,$$

når a går mot uendelig.

Dermed er beviset fullført.

---

[5] Lesere som ikke har bakgrunn i regning med komplekse tall vil her måtte godta at $\log(-1) = \pi\sqrt{-1}$.

Q.E.D.

Vi skal dernest se på en interessant variant av Teorem 1. Denne får vi ved å la $\varepsilon_j = 1$, for j= 1, 2,…, $m-1$, og $\varepsilon_m = -1.$ Videre lar vi $y = x_m$. Dermed får vi fra Teorem 1 og Korollar 2 følgende resultat:

Korollar 3

(4.18)
$$\sum_{j=1}^{m-1} \int_s^{x_j} \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_s^{y} \frac{dx}{\Delta(x)} + C_1,$$

og

(4.19)
$$\sum_{j=1}^{m-1} \int_s^{x_j} \frac{dx}{\left(1 - x^2/a^2\right)\Delta(x)} = \int_s^{y} \frac{dx}{\left(1 - x^2/a^2\right)\Delta(x)} - \frac{a}{2\Delta(a)} \log\left(\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta(a)}{f(a) - \varphi(a)\Delta(a)}\right) + C_2,$$

der C_1 og C_2 er passende konstanter.

Eksempel 4.1:

For å lette forståelsen av resultatet i Teorem 1, skal vi nå se på et eksempel der vi skal benytte (4.18) i Korollar 3. La m = 4 og la

(4.20)
$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + x^4, \text{ og } \varphi(x) = b_0 x .$$

Vi kan, som nevnt ovenfor, skrive

(4.21)
$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 \Delta(x)^2 = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)(x^2 - y^2),$$

der vi har latt $y = x_4$. Vi lar nå x_1, x_2, x_3, være frie variable, slik at y og koeffisientene a_0, a_1 og b_0 blir funksjoner av disse tre røttene. Siden produktet av røttene er lik konstantleddet i (4.21), har vi sammenhengen

$$y^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = a_0^2,$$

slik at vi får at

(4.22)
$$y = \frac{a_0}{x_1 x_2 x_3}, \text{ eller } y = -\frac{a_0}{x_1 x_2 x_3}.$$

Hvilken av disse to likningene som gjelder vil bestemmes nedenfor. Siden $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1,$ får vi fra (4.2) at koeffisientene a_0, a_1 og b_0 bestemmes fra likningene

$$f(x_j) + \varphi(x_j)\Delta(x_j) = 0,$$

hvilket er ekvivalent med

$$a_0 + a_1 x_j^2 + b_0 x_j \Delta(x_j) = -x_j^4, \tag{4.23}$$

for j = 1, 2, 3. Siden $\Delta(x_j)$ er kjent har vi i (4.23) tre likninger med tre ukjente som kan løses på velkjent måte. Videre, siden $\varepsilon_4 = 1,$ bestemmes fortegnet til y fra

$$a_0 + a_1 y^2 - b_0 y \Delta(y) = -y^4. \tag{4.24}$$

Vi ser videre at koeffisientene blir rasjonelle funksjoner av røttene og av $\Delta(x_j)$, j = 1, 2, 3.

La oss vende tilbake til den generelle diskusjonen. Hvis vi tenker nærmere over beviset av Teorem 1 merker vi oss at det kun avhenger av den egenskapen av $\Delta(x)$ at $\Delta(x)^2$ er et polynom i x med like potenser. *Altså er Teorem 1 gyldig når* $\Delta(x)^2$ *erstattes av et vilkårlig polynom i* x^2. Dette er et svært viktig resultat som er gitt som Korollar 4 nedenfor.

Korollar 4

La $\Delta(x)^2$ *nå betegne et polynom i* x^2 *med vilkårlig grad, og anta fortsatt at røttene i* $\psi(x) = f(x)^2 - \varphi(x)^2 \Delta(x)^2$ *er reelle og har tallverdi mindre enn* $\min(1, a)$. *Da vil fortsatt resultatene i Teorem 1, og Korollarene 2 og 3 gjelde.*

Når graden av polynomet som inngår under rottegnet i integralet ovenfor overstiger 4 kalles det korresponderende integral *hyperelliptisk*. Altså er resultatet i Teorem 1 mye mer generelt enn det en ved første øyekast legger merke til, nemlig et resultat som gjelder for en stor klasse av hyperelliptiske integraler. Som nevnt innledningsvis er det en rekke forskjellige addisjonsteoremer i Abels produksjon. Blant annet behandlet Abel hyperelliptiske integraler av andre typer i flere arbeider. I for eksempel Abel (1828), utledet han addisjonsteoremer for hyperelliptiske integraler av typen

$$\int_s^x \frac{g(x)dx}{(x-a)\sqrt{h(x)}},$$

der $g(x)$ og $h(x)$ er polynomer av vilkårlig grad, ved å bruke resonnementer som er analoge til beviset av Teorem 1. Vi merker oss at dersom $g(x)$ har en rot lik a, kan vi skrive $g(x)=(x-a)g^*(x)$, slik at i dette tilfellet reduserer det siste integralet seg til

$$\int_s^x \frac{g^*(x)dx}{\sqrt{h(x)}}.$$

Dersom $g^*(x)=1$ og $h(x)$ kun inneholder ledd med like potenser vil dette integralet redusere seg til det som er dekket av Korollar 4.

Eksempel 4.2:

La

(4.25) $$f(x)=bx+x^3, \quad \text{og} \quad \varphi(x)=c,$$

der b og c er konstanter. Dette gir

(4.26) $$f\left(x_j\right)+\varphi\left(x_j\right)\Delta\left(x_j\right)=bx_j+x_j^3+c\Delta\left(x_j\right)=0,$$

for $j=1,2,3,$ der $y=x_3$. Ved å løse (4.26) m.h.p. b og c får vi:

(4.27) $$b=\frac{x_2^3\Delta\left(x_1\right)-x_1^3\Delta\left(x_2\right)}{x_1\Delta\left(x_2\right)-x_2\Delta\left(x_1\right)},$$

og

(4.28) $$c=\frac{x_2x_1^3-x_1x_2^3}{x_1\Delta\left(x_2\right)-x_2\Delta\left(x_1\right)}.$$

Videre følger det, ved å bruke sammenhengen mellom koeffisientene og røttene i polynomet

$$\left(bx+x^3\right)^2-c^2\Delta(x)^2=\left(x^2-x_1^2\right)\left(x^2-x_2^2\right)\left(x^2-y^2\right),$$

at

(4.29) $$y = \frac{c}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1\Delta(x_2) - x_2\Delta(x_1)} = \frac{x_1\Delta(x_2) + x_2\Delta(x_1)}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2}\,.$$

Den siste overgangen i (4.29) følger ved multiplikasjon i teller og nevner i nest siste uttrykk i (4.29) med $x_1\Delta(x_2) + x_2\Delta(x_1)$. Dermed får vi fra (4.19) i Korollar 3 at

(4.30) $$\int_s^{x_1} \frac{dx}{\left(1 - x^2/a^2\right)\Delta(x)} + \int_s^{x_2} \frac{dx}{\left(1 - x^2/a^2\right)\Delta(x)}$$
$$= \int_s^{y} \frac{dx}{\left(1 - x^2/a^2\right)\Delta(x)} - \frac{a}{2\Delta(a)}\log\left(\frac{ab + a^3 + x_1 x_2 y\Delta(a)}{ab + a^3 - x_1 x_2 y\Delta(a)}\right) + C_1,$$

der *b* er gitt ved (4.27), og videre fra (4.18) at

(4.31) $$\int_s^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} + \int_s^{x_2} \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_s^{y} \frac{dx}{\Delta(x)} + C_2,$$

der C_1 og C_2 er passende konstanter.

Betrakt tilfellet med $s = 0$ i (4.31). Med dette valget ser vi at vi får $C_2 = 0.$ Dermed gjenkjenner vi dette spesialtilfellet av (4.31) som addisjonsteoremet gitt i (3.18).

Eksempel 4.3:

La nå $x_2 = h$, der *h* er en konstant. Fra (4.29) får vi da at

(4.32) $$y = \frac{x_1\Delta(h) + h\Delta(x_1)}{1 - k^2 h^2 x_1^2}$$

og fra (4.31) at

(4.33) $$\int_s^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_s^{y} \frac{dx}{\Delta(x)} - C^*,$$

der C* er en passende konstant.

Eksempel 4.4:

Selv om vi i bevisene ovenfor har antatt at røttene i $\psi(x)$ har tallverdi mindre enn 1 kan en vise at resultatene ovenfor gjelder mer generelt. Vi har følgende:

A: Dersom $h = 0$, blir $y = x$ og $\Delta(y) = \Delta(x)$.

B: Dersom $h = \infty$, blir $y = \pm 1/kx$ og $\Delta(y) = \mp \dfrac{\Delta(x)}{kx^2}$.

C: Dersom $h = 1$, blir

$$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}} \quad \text{og} \quad \Delta(y) = \frac{\left(k^2-1\right)x}{1-k^2x^2}.$$

D: Dersom $h = 1/k$, blir

$$y = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} \quad \text{og} \quad \Delta(y) = \frac{\left(1-k^2\right)x}{\left(1-x^2\right)k}.$$

La oss vende tilbake til den generelle teorien og betrakte situasjonen når det er *m* røtter i polynomet i (4.1) og $m-1$ av disse er like. I en slik situasjon vil (4.18) i Korollar 3 redusere seg til følgende resultat:

Korollar 5

Dersom $x_j = x_1, j = 1, 2, ..., n = m-1,$ *har vi at*

(4.34)
$$n\int_s^{x_1} \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_s^{y} \frac{dx}{\Delta(x)} + C,$$

der C er en passende konstant og sammenhengen mellom x_1 *og* y *er bestemt slik at*

(4.35)
$$f(x)^2 - \varphi(x)^2\Delta(x)^2 = (x^2 - x_1^2)^n(x^2 - y^2).$$

Tilsvarende spesialisering gjelder også for (4.19) i Korollar 3. På samme måte som i Eksempel 4.1 kan en nå finne koeffisientene i polynomet på venstre side i (4.35) og deretter bestemme *y* som funksjon av x_1. Abel viser imidlertid at det finnes en smartere måte å gå fram på som er vesentlig enklere. Dette resultatet er oppsummert i det neste korollaret.

Korollar 6

La y_n *være bestemt ved*

(4.36) $$n\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_0^{y_n} \frac{dx}{\Delta(x)}.$$

Da kan y_n beregnes rekursivt som funksjon av x ved formlene

(4.37a) $$y_{n+1} = -y_{n-1} + \frac{2y_n\Delta(x)}{1-k^2x^2y_n^2},$$

(4.37b) $$y_{2n-1} = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{x(1-k^2y_n^2y_{n-1}^2)},$$

og

(4.37c) $$y_{2n} = \frac{2y_n\Delta(y_n)}{1-k^2y_n^4},$$

der $y_0 = 0$ og $y_1 = x$. *Funksjonen y_n er rasjonell når n er et oddetall og har formen* $p(x)\Delta(x)$, *der* $p(x)$ *er rasjonell når n er et partall.*

Bevis av Korollar 6:

For enkelhets skyld innfører vi nå notasjonen

$$H(x) = \int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)}.$$

Dermed kan vi uttrykke (4.36) som $nH(x) = H(y_n)$, der det følger fra (4.36) at y_n er bestemt slik at når $x = 0$, så er også $y_n = 0$. Dette er ekvivalent med å la integrasjonskonstanten C_1 i (4.18) være lik null. Den påfølgende analysen i tilfellet der C_1 er forskjellig fra null er analog. Fra (4.36) følger det at

(4.38) $$(n+r)H(x) = H(y_{n+r}) = nH(x) + rH(x) = H(y_n) + H(y_r),$$

hvilket medfører at

(4.39) $$H(y_{n+r}) = H(y_n) + H(y_r).$$

La z være gitt ved

(4.40) $$z = \frac{y_n\Delta(y_r) + y_r\Delta(y_n)}{1-k^2y_r^2y_n^2}.$$

Det følger nå fra (4.31) og (4.39) at

(4.41) $$H(z) = H(y_r) + H(y_n) = H(y_{n+r}).$$

Siden funksjonen $H(x)$ er strengt voksende følger det derfor fra (4.41) at $z = y_{r+n}$. Fra (4.41) får vi derfor at

(4.42) $$y_{n+r} = \frac{y_n \Delta(y_r) + y_r \Delta(y_n)}{1 - k^2 y_r^2 y_n^2}.$$

På tilsvarende måte kan en vise at

(4.43) $$y_{n-r} = \frac{y_n \Delta(y_r) - y_r \Delta(y_n)}{1 - k^2 y_r^2 y_n^2},$$

for $n > r$. Ved å la $r = 1$ i (4.42) og (4.43) får vi at

(4.44) $$y_{n+1} = \frac{y_n \Delta(x) + x \Delta(y_n)}{1 - k^2 x^2 y_n^2},$$

og

(4.45) $$y_{n-1} = \frac{y_n \Delta(x) - x \Delta(y_n)}{1 - k^2 x^2 y_n^2}.$$

Tar vi summen av uttrykkene i (4.44) og (4.45) får vi derfor følgende rekursjonsformel for $\{y_n\}$:

(4.46) $$y_{n+1} = -y_{n-1} + \frac{2 y_n \Delta(x)}{1 - k^2 x^2 y_n^2}.$$

Ved suksessiv kalkulasjon av $y_2, y_3, \ldots,$ finner en lett at y_n er rasjonell når n er et oddetall og har formen $p(x)\Delta(x)$, der $p(x)$ er rasjonell når n er et partall. Videre får vi ved å multiplisere uttrykkene i (4.42) og (4.43) at

(4.47) $$y_{n+r} y_{n-r} = \frac{y_n^2 - y_r^2}{1 - k^2 y_n^2 y_r^2}.$$

Ved å sette $r = n - 1$ i (4.47) får vi at $y_{n-r} = y_1 = x$, og

(4.48) $$y_{2n-1} = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{x(1-k^2 y_n^2 y_{n-1}^2)}.$$

Ved å sette *r* = *n* i (4.42) finner vi, siden $y_1 = x$, at

(4.49) $$y_{2n} = \frac{2y_n \Delta(y_n)}{1-k^2 y_n^4}.$$

Dermed er beviset fullført.

Q.E.D.

Eksempel 4.5:

I dette eksemplet betrakter vi spesialtilfellet med *k* = 0. Som kjent reduserer (4.36) seg da til

(4.50) $$n \arcsin x = \arcsin y_n.$$

La $z = \arcsin x$, dvs., $x = \sin z$. Vi kan alternativt uttrykke relasjonen i (4.50) som

(4.51) $$y_n = \sin(n \arcsin x) = \sin nz.$$

For *n* = 1 medfører (4.37c) at

(4.52) $$y_2 = 2y_1\sqrt{1-y_1^2} = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin z \cos z.$$

Ved å kombinere (4.51) og (4.52) får vi derfor det velkjente resultatet at $\sin 2z = 2\sin z \cos z$.

For *n* = 2 medfører (4.37b) og (4.52) at

(4.53) $$y_3 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x} = 4x(1-x^2) - x = 3x - 4x^3,$$

som sammen med (4.51) gir det velkjente resultatet at $\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$.

5. Avsluttende bemerkninger

I denne artikkelen har jeg forsøkt å gi en elementær oversikt over deler av teorien for elliptiske integraler, slik denne teorien forelå på Abels tid. Videre har motivasjonen vært (i), å vise at det er mulig å følge Abels angrepsmåte uten å være profesjonell matematiker, men med kun et forholdsvis elementært grunnlag i integral- og differensialregning, og (ii), å vise originaliteten i Abels angrepsmåte ved å belyse i hvilken grad denne skilte seg fra det som var de etablerte metodene på begynnelsen av 1800 tallet.

Først har jeg gitt en kort innføring i de sentrale angrepsmåtene til Euler, Lagrange og Legendre i deres arbeid med å etablere addisjonsteoremer for elliptiske integraler. Hensikten med dette har først og fremst vært å plassere Abels bidrag i den historiske konteksten, og dernest vise eksempler på hvordan sentrale anvendelser i mekanikk og geometri leder til elliptiske integraler. Deretter har jeg gitt en elementær gjennomgang av beviset til en versjon av Abels generelle addisjonsteorem, som forhåpentlig er lettere å følge enn Abels versjon. Som jeg har påpekt er Abels metode av så grunnleggende karakter at når beviset for addisjonsteoremet i det spesielle tilfelle som omfatter Legendres elliptiske integraler er etablert, så lar det seg umiddelbart generalisere til hyperelliptiske integraler (abelske integraler). Som mange har påpekt var det typisk for Abel å angripe problemstillinger på den mest generelle måten i stedet for å studere en rekke særskilte tilfeller. Arbeidene til Abel på dette feltet viste seg senere å inspirere en rekke av de største matematikere til nye måter å studere geometrien til algebraiske kurver på.

Denne artikkelen har imidlertid ikke hatt som ambisjon å plassere Abels innsats på feltet i forhold til arbeidene til Jacobi (1804-1851) og Gauss (1777-1855). Mens Abel var i gang med å publisere sine epokegjørende arbeider innen dette tema kom det som kjent fram at Gauss også hadde arbeidet med teorien for elliptiske integraler, og at han allerede så tidlig som i 1798 hadde oppnådd noen av de samme resultatene som Abel.[6] Resultatene til Gauss hadde imidlertid blitt liggende i skuffen, slik at offentligheten ikke hadde kjennskap til dette på Abels tid. Når det gjelder forholdet mellom Abel og Jacobi, er dette diskutert i den biografiske litteraturen, se for eksempel Bjerknes (1880/1929), Ore (1954) og Stubhaug (1996). Bortsett fra den franske utgaven av Ores biografi, inneholder imidlertid disse biografiene ikke matematisk materiale. Jacobis lærebok om elliptiske integraler og funksjoner, Jacobi (1829), kom ut samme år som Abel døde, og har i ettertid blitt kritisert for mangelfull omtale og manglende referanser til Abel.

Et viktig tema innen teorien for elliptiske funksjoner er teorien for transformasjoner. Del II av denne artikkelen (Dagsvik, 2009) vil diskutere sannsynlighetsfordelinger definert som normerte elliptiske integraler (elliptiske fordelinger). Utgangspunktet er Abels addisjonsteorem og teorien for transformasjoner av elliptiske integraler, som vil anvendes til å studere utvalgte ikke-lineære

---

[6] Korrespondanse mellom redaktøren Schumacher i Astronomische Nachrichten og Gauss.

transformasjoner av stokastiske variable med elliptiske fordelinger. Kun spesialtilfeller av dette har blitt betraktet tidligere i sannsynlighetsteorien, nemlig arcussinus fordelingen og Cauchy fordelingen. Arcussinus fordelingen har blant annet en sentral plass i teorien for tilfeldig gang og Cauchy fordelingen er et spesialtilfelle innen klassen av stabile fordelinger. Disse fordelingsfunksjonene er, som vi har sett ovenfor, spesialtilfeller av elliptiske integraler.

Vedlegg

Bevis av Lemma 1:

Anta at $P(x)$ og $Q(x)$ er to polynomer med ulike røtter og at røttene i $P(x)$ er forskjellige fra røttene i $Q(x)$, samt at $Q(x)$ har grad *n* som er høyere enn graden til $P(x)$. Da kan en skrive

(A.1)
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x - x_j},$$

der A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, er konstanter og $x_1, x_2, \ldots, x_n$, er røttene i $Q(x)$. For å se at dette er mulig multipliserer vi begge sider i (A.1) med $Q(x)$ slik at

(A.2)
$$S(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j Q_j(x) - P(x) = 0,$$

der

$$Q_j(x) = D \prod_{k \neq j} (x - x_k)$$

og *D* er en konstant. Siden venstre side i (A.2), $S(x)$, er et polynom av grad $n-1$, må vi ha at $S(0), S'(0), S''(0), \ldots, S^{(n-1)}(0)$ alle er lik null for at $S(x)$ skal være lik null for alle *x*. Spørsmålet er nå om dette er mulig. Vi har altså at

$$S^{(k)}(0) \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j Q_j^{(k)}(0) - P^{(k)}(0) = 0,$$

for $k = 0,1,...,n-1$. Dette gir *n* likninger med *n* ukjente, nemlig $A_1, A_2,..., A_n$, som derfor har minst ett sett av løsninger for $\{A_j\}$. Altså er representasjonen i (A.1) mulig. Videre ser vi fra (A.1) at ved å multiplisere begge sider av (A.1) med $x - x_k$ får vi at

(A.3)
$$\frac{P(x)(x-x_k)}{Q(x)} = A_k + \sum_{j\neq k} \frac{A_j(x-x_k)}{x-x_j}.$$

La nå $x \to x_k$. Ved å bruke l'Hôpitals regel får vi at

$$\frac{x-x_k}{Q(x)} \underset{x\to x_k}{\to} \frac{1}{Q'(x_k)}.$$

Følgelig blir

(A.4)
$$\lim_{x\to x_k}\left(\frac{P(x)(x-x_k)}{Q(x)}\right) = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} = A_k,$$

fordi det andre leddet på høyre side i (A.3) går mot null.

La oss nå betrakte en situasjon der $Q(x) = g_2(x)$, der $g_2(x)$ er et polynom av grad $n = 2m$ og inneholder kun like potenser, og at $P(x) = g_1(x)$ er et annet polynom med grad mindre enn $2m$ som kun inneholder odde potenser, og at alle røttene i $g_2(x)$ er forskjellige, og forskjellige fra røttene i $g_1(x)$. Dette medfører at røttene i $g_2(x)$ kan skrives som x_j og $-x_j$, for $j = 1, 2,..., m$. Videre blir $g_2'(x)$ et polynom med odde eksponenter. Altså kan vi, ifølge det vi har vist ovenfor, skrive

(A.5)
$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{A_j}{x-x_j} + \frac{B_j}{x+x_j}\right),$$

der A_j og B_j er ukjente koeffisienter. Ved å anvende resultatet i (A.4) ovenfor får vi (siden $g_1(x) = -g_1(-x)$, og $g_2'(x) = -g_2'(-x)$) at

(A.6)
$$B_j = \frac{g_1(-x_j)}{g_2'(-x_j)} = \frac{g_1(x_j)}{g_2'(x_j)} = A_j,$$

hvilket gir

(A.7)
$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{2xA_j}{x^2 - x_j^2}.$$

Ved å sette $x = a$, følger derfor det ønskede resultat fra (A.6) og (A.7).

Q.E.D.

Referanser:

Abel, N. H. (1828): Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **3**, 313-323.

Abel, N. H. (1829): Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **4**, 236-348.

Abel, N. H. (1841): Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. *Mémoires présentés par divers savants*, bind VII, Paris. Finnes også i bind I av L. Sylow og S. Lie (red.), *Oeuvres complète de Niels Henrik Abel*, Christiania, 1881.

Aubert, K. E. (1979a): Niels Henrik Abel. *Normat*, **4**, 129-140.

Aubert, K. E. (1979b): Abels addisjonsteorem. *Normat*, **4**, 149-158.

Birkeland, B. (1993): *Norske matematikere.* Universitetsforlaget, Oslo.

Bjerknes, C. A. (1880/1929): *Niels Henrik Abel. En skildring af hans liv og videnskabelige virksomhet.* Følgeskrift til Nordisk Tidskrift, Stockholm. En omarbeidet og forkortet utgave ble utgitt i 1929 på Aschehough & Co., Oslo.

Cayley, A. (1876/1961): *An Elementary Treatise on Elliptic Functions*. Constable and Company Ltd. London, UK. (Opprinnelig publisert i 1876 av George Bell and Sons).

Dagsvik, J. K. (2010): Elliptiske integraler II: Fragmenter av en teori for elliptiske sannsynlighetsfordelinger. Artikkel under utarbeidelse.

Eide, M. (2009): Abel, de elliptiske funksjonene og lemniskaten. *Normat*, **57**, 1-10.

Euler, L. (1761): De integratione æquationis differentialis (On the Integration of the Differential Equation) $mdx/\sqrt{1-x^4} = ndy/\sqrt{1-y^4}$. *Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ* **6,** 37-57. Finnes også i Eulers samlede verker, *Omnia* I_{20}.

Fagnano, G. C. (1750): *Produzioni matematiche del conte Giulio Carlo di Fagnano*. Nella stamperia Gavelliana, Pesaro, Italia.

Kleiman, S. L. (2004): What is Abel's Theorem Anyway? I A. O. Laudal og R. Piene (red.), *The legacy of Niels Henrik Abel- The Abel bicentennial, Oslo, 2002,* s. 395-440, Springer-Verlag, Berlin.

Hoffmann, J. E. (1949): *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris* (*1672-1676*), Leibniz Verlag, Munchen.

Houzel, C. (1986): Fonctions elliptiques et intégrales abeliennes. I J. Dieudonné (red.), *Abrégé d'histoire des mathématiques,* kapittel 7, Hermann, Paris.

Houzel, C. (2004): The Work of Niels Henrik Abel. I A. O. Laudal og R. Piene (red.), *The legacy of Niels Henrik Abel- The Abel bicentennial, Oslo, 2002,* s. 21-178, Springer-Verlag, Berlin.

Jacobi, C. G. J. (1829): *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*. Borntreger, Regiomonti. Også gjengitt i bind I av *C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke*, G. Reimer, Berlin, 1881.

Lagrange, J.-L. (1766-69): Sur quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparés mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. I bind II av J.-A. Serret (red.), *Oeuvres de Lagrange*, Gauthiers-Villars, 1867-1892, Paris. Først publisert i Miscellanea Taurinensia, IV. Mémoires de *l'Académie Royale de Sciences des Turins*, Torino.

Landen, J. (1775/1780): An Investigation of a General Theorem for Finding the Length of an Arc of Any Conic Hyperbola, by means of Two Elliptic Arcs, with Some Other New and Useful Theorems Deduced Therefrom. *Philosophical Transactions* **65**, 283-289, The Royal Society of London. Også publisert i *Mathematical Memoirs* (1780), J. Nourse, Bookfeller to His Majesty, London.

Lange-Nielsen, F. (1953): Niels Henrik Abel. *Nordisk Matematisk Tidskrift*, **1**, 65-90.

Laudal, A. O. og R. Piene (red.), (2004): *The legacy of Niels Henrik Abel-The Abel bicentennial, Oslo, 2002.* Springer-Verlag, Berlin.

Legendre, A. M. (1793): *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*. Du Pont et Firmin Didot, Paris.

Legendre, A. M. (1811-1817): *Exercices de calcul intégral sur divers orders de transcendantes, et sur les quadratures.* Courcier, 3 bind (1811, 1817, 1816), Paris.

Legendre, A. M. (1925-28): *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériens.* Imprimerie Huzard-Courcier, 3 bind (1825, 1826, 1828), Paris.

Lindstrøm, T. L. (2006): *Kalkulus*. Universitetsforlaget, Oslo, 3. utgave.

Ore, Ø. (1954): *Niels Henrik Abel. Et geni og hans samtid.* Gyldendal, Oslo.

Skolem, T. (1926): Elliptiske funksjoners komplekse multiplikasjon. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 123-136.

Stephenson, R. J. (1960): *Mechanics and Properties of Matter.* Wiley, London.

Stubhaug, A. (1996): *Et foranskutt lyn. Niels Henrik Abel og hans tid*. Aschehoug, Oslo.

Størmer, C. (1929): Abels opdagelser: Fire forelesninger for de realstuderende i anledning av 100-årsdagen for Abels død. *Norsk Matematisk Tidskrift*, **11**, 85-96 og 125-138.

Sørensen, H. K. (2004): *The Mathematics of Niels Henrik Abel*. Doktorgradsavhandling, Institut for videnskabshistorie, Universitetet i Århus, 2002. 2. utgave 2004.

Sylow, L. og S. Lie (1881): *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*. To bind, publisert av den norske stat.