THOMAS VON BRASCH
Forskerrekrutt, Statistisk sentralbyrå og NUPI

JOHAN BYSTRÖM
Forsker, Luleå Tekniska Universitet

LARS PETTER LYSTAD
Professor, Høgskolen i Narvik

Fibonaccirekken i økonomifaget[1]

Fibonaccirekken er en myteomspunnet tallrekke. Fasinasjonen for denne rekken skyldes blant annet at den nesten har en «universell» anvendelse og blir koblet til arkitektur, kunst, musikk samt en rekke fenomener i naturen. I denne artikkelen vil vi belyse hvordan en generalisert Fibonaccirekke på to måter kan kobles til økonomifaget. For det første kan den kobles direkte til økonomiske teorier, som for eksempel en sentralbanks rentesetting, konsument- og investeringsadferd. For det andre kan den brukes som måleinstrument for å tallfeste økonomiske parametre.

KANINBESTAND GIR OPPHAV TIL TALLREKKE

Fibonaccirekken er oppkalt etter matematikeren Leonardo Pisano Bigollo (1170–1250), også kjent som Leonardo Fibonacci. Han blir regnet som den fremste europeiske matematikeren i middelalderen. Hans viktigste verk var boken som omhandlet tallteori, Liber Abaci, hvis formål var å demonstrere at det indiske tallsystemet var bedre enn det romerske. Han viste i denne boken hvordan titallsystemet blant annet kan brukes til en rekke økonomiske anvendelser, som for eksempel rente-, profitt- og valutaberegninger.

Det han i ettertid skulle bli mest kjent for var rekken han brukte til å beskrive utviklingen av kaninbestanden i et hypotetisk eksperiment: I den første måneden blir det født et par med kaniner. Hvis vi antar at det tar en måned å bli kjønnsmoden og at i hver måned vil hvert kjønnsmodent kaninpar produsere et nytt par med kaniner, så vil det i den andre måneden være 2 par med kaniner. I den tredje måneden vil det første paret med kaniner igjen produsere et nytt kaninpar og det vil da være totalt 3 par med kaniner. I den fjerde måneden vil paret med kaniner som ble født i den andre måneden også være kjønnsmodent slik at det i denne måneden blir produsert 2 par med kaniner. Totalt er det 5 kaninpar i den fjerde måneden. Utviklingen av kaninpar følger det mønsteret som vi i dag kjenner som Fibonaccirekken (F_n):

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots,$$

hvor «...» indikerer at rekken fortsetter i det uendelige og følger samme mønster som de foregående tallene. Det er ikke opplagt hva dette mønsteret er, men ved nærmere inspeksjon vil leseren kunne bekrefte at hvert tall i rekken er summen av de to foregående tall:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1},$$

[1] *Takk til Terje Skjerpen, Ådne Cappelen, Pål Boug og Samfunnsøkonomens konsulent for nyttige tilbakemeldinger.*

med startverdier $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$. Med andre ord, i måned n vil det totale antall par med kaniner være summen av antall kaninpar i forrige måned (n-1) og antallet nyproduserte kaninpar, dvs. antall kaninpar i måned (n-2) ettersom det tar en måned å bli kjønnsmoden.

Fibonaccirekken har blitt kjent fordi den er påstått å dukke opp i en rekke fenomener observert i naturen. Blant annet så skal rekken inngå i beskrivelsen av bølger, luftdynamikk og bladstilling hos planter. Innenfor matematikken er det vist at Fibonaccirekken kan brukes til å beregne tallet π, se f.eks. Castellanos (1986). Det er også en tett sammenheng mellom Fibonaccirekken og et annet tall kjent som det *Gylne snitt*. Det gylne snitt, ofte representert med den greske bokstaven fi (ϕ), er gitt ved:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Sammenhengen med det gylne snitt og Fibonaccirekken kan sees ved å la forholdet mellom to påfølgende tall i Fibonaccirekken være en ny rekke. Det vil si, vi definerer rekken $H_n = F_n/F_{n+1}$, hvor de første elementene er gitt ved:

0/1,	1/1,	1/2,	2/3,	3/5,	5/8,	8/13,	13/21,	21/34,	34/55,	…
= 0,	1,	.500,	.666…,	.600,	.625,	.615…,	.619…,	.617…,	.618…,	…

Denne rekken går mot den inverse av det gylne snitt, $\phi^{-1} \approx .618$.

I likhet med Fibonaccirekken er også det gylne snitt koblet til en rekke fenomener i naturen. Det blir blant annet hevdet at man kan finne det gylne snitt i syklusen til hjernebølger (Weiss og Weiss, 2003) og at det dukker opp i frekvensen til arvestoffets byggestener (nukleotider) (Yamagishi og Shimabukuro, 2007).

Det gylne snitt er ikke bare spesielt på grunn av hvordan det har blitt observert i en rekke naturfenomener. Matematisk er tallet også meget interessant da det for eksempel innehar egenskapen at kvadratet av tallet er lik $\phi + 1$ og at den inverse av tallet er lik tallet fratrukket 1: $\phi^{-1} = \phi - 1$

FOLK RESPONDERER PÅ INSENTIVER

Det sies at økonomiske teorier kan oppsummeres i fire ord: «Folk responderer på insentiver». Økonomiske modeller setter dette utgangspunktet inn i en matematisk form. For eksempel vil preferansene til en økonomisk aktør kunne være representert gjennom en funksjon $f(z_t)$, hvor z_t representerer en vektor av variabler i periode t som den økonomiske aktøren har et forhold til. Det kan for eksempel være arbeidsledighet, konsum, fritid og rentenivå. Økonomisk teori tar eksplisitt innover seg at økonomiske aktører har preferanser også over hva som skjer fremover i tid når de tilpasser seg. I denne forbindelse kan det være nyttig å dele z_t inn i to typer variabler: en kontrollvariabel u_t som aktøren har råderett over og en tilstandsvariabel x_t som antas å følge den lineære sammenhengen:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t. \tag{1}$$

Kontrollvariabelen kan i dette systemet aktivt brukes for å påvirke verdien av tilstandsvariabelen i neste periode. For eksempel, hvis $A = 1$ og B er positiv vil en høyere u_t i dag resultere i en høyere verdi på tilstandsvariabelen i morgen (x_{t+1}). At aktøren tilpasser seg over tid kan da representeres med en veid sum av $f(x_t,u_t)$ i dag og i $T-1$ perioder i fremtiden:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f(x_t,u_t), \tag{2}$$

hvor $0 < \beta \leq 1$ er en diskonteringsfaktor. Dette kriteriet blir ofte benyttet innenfor makroøkonomiske modeller (Ljungqvist og Sargent, 2004) og kan for eksempel reflektere profittfunksjonen til en bedrift, nyttefunksjonen til en (representativ) husholdning eller tapsfunksjonen til en sentralbank.

Økonomiske systemer vurderes gjerne i forhold til en likevektssituasjon. Vi antar at det eksisterer en verdi på kontrollvariabelen $\bar{u}$ som gir en slik likevekt $\bar{x}$. Selv om systemet initialt begynner utenfor likevektstilstanden, antar vi at systemet når likevektstilstanden i siste periode T:

$$x_T = \bar{x}. \tag{3}$$

Likevektstilstanden er kjennetegnet ved to egenskaper. For det første er tilstanden konstant og for det andre er tilstanden optimal. Hvis systemet starter i likevektstilstanden er det optimalt å bli værende i likevektstilstanden i alle tidsperioder. Med optimalitet menes den verdien på kontrollvariabelen som minimerer kriteriet (2) for en gitt initialtilstand x_0, prosessligningen (1) og betingelsen at likevekten skal nås i siste periode (3). Selv om dette dynamiske optimeringsproblemet er deterministisk, dvs. at det ikke er usikkerhet om tilstanden til det økonomiske systemet, så vil metoden vi bruker i denne artikkelen også gjelde for problemer hvor slik usikkerhet er tilstede (Levine mfl., 2008).

Den optimale verdien på kontrollvariabelen, enten den er gitt ved en investeringsfunksjon, en konsumfunksjon, en renteligning eller en annen økonomisk respons, kan skrives som en funksjon g_t av tilstanden x_t:

$$u_t = g_t(x_t). \tag{4}$$

At den optimale kontrollfunksjonen avhenger av tiden skyldes i dette rammeverket at aktøren kun forholder seg til et endelig antall tidsperioder. For eksempel vil hvor mye man ønsker å konsumere i dag avhenge av om man har 100 år igjen å leve eller om man kun har 4 år igjen å leve. Hvis derimot kriteriet (2) hadde summert seg over et uendelig antall tidsperioder ville den optimale kontrollfunksjonen ha vært tidsinvariant. En annen egenskap ved kontrollfunksjonen er at den avhenger blant annet av systemet den økonomiske aktøren må forholde seg til (1) og preferansene til aktøren (2). Skulle det være slik at systemet ble endret, for eksempel som følge av nye skatteregler eller andre intervensjoner fra myndighetenes side, vil følgelig også den optimale kontrollfunksjonen endres.[2] Vi har med andre ord avgrenset oss til en mer presis matematisk fortolkning av den noe mer løselige beskrivelse av økonomifaget: «Folk responderer på insentiver».

KOBLINGEN TIL ØKONOMIFAGET

Veien fra at Fibonaccirekken skal kunne forklare en myriade av naturfenomener til at det er en kobling mellom Fibonaccirekken og økonomiske modeller er ikke lang. Naturfenomener, som bølgebevegelse og luftdynamikk, kan sees på som prosesser som velger minste motstands vei gitt de rammene som omgir dem. Litt løselig kan man derfor si at de representerer en optimaliserende prosess. Ettersom økonomiske modeller også representerer optimaliserende prosesser ville det ikke være unaturlig om det var en kobling mellom Fibonaccirekken og økonomisk teori. Vårt utgangspunkt er i denne sammenhengen den optimale kontrollfunksjonen $u_t = g_t(x_t)$. For å gjøre problemet håndterbart forholder vi oss fra nå av til den lineære approksimasjonen:

$$u_t = \bar{u} + g_t'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) \tag{5}$$

Approksimasjonen er gjort rundt likevektstilstanden og uttrykket $g_t'(\bar{x})$ representerer verdien i likevektstilstanden til den deriverte av kontrollfunksjonen. Det er dette uttrykket som kan kobles til Fibonaccirekken. Dette viser vi best med et eksempel:

Brock-Mirman modellen, en modell som ofte er brukt i makroøkonomiske lærebøker[3], tar utgangspunkt i en representativ husholdning som maksimerer sin egen nytte gitt økonomiske beskrankninger. Det totale antall goder (y_t) blir produsert ved hjelp av kapital (x_t) som innsatsfaktor i produksjonsprosessen, her representert ved en Cobb-Douglas teknologi:

$$y_t = \gamma x_t^{\alpha}. \tag{6}$$

I en lukket økonomi vil det som blir produsert enten bli konsumert (c_t) eller investert (u_t), slik det er definert i økosirken:

$$y_t = c_t + u_t. \tag{7}$$

For å gjøre problemet lett gjennomskuelig antar vi at kapitalen depresierer fullt ut, mao., neste periodes kapitalnivå vil derfor være lik investeringsnivået i inneværende periode som i Ricardos såkornsmodell:

$$x_{t+1} = u_t. \tag{8}$$

Med de tre sammenhengene (6) – (8) som utgangspunkt, samt et initialt kapitalnivå (x_0), maksimerer den representative husholdningen en neddiskontert sum av nytte:[4]

$$\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln(c_t). \tag{9}$$

Følgende parameterverdier er valgt: $\beta = 1$, $\gamma = \alpha^{-1}$ og $\alpha = 1 - \phi^{-1}$. Med disse parameterverdiene vil likevektstilstanden være $\bar{x} = 1$. Valget av parameterverdier er gjort i pedagogisk øyemed slik at problemet blir enklere å forholde seg til. Vi vil senere vise hvordan løsningen forandres ved valg av andre parameterverdier.

Med Brock-Mirman modellen som utgangspunkt kan man redegjøre for koblingen til Fibonaccirekken. Sammenhengen mellom den optimale responsen til den representative husholdningen og Fibonaccirekken er at uttrykket $g_t'(\bar{x})$ følger mønsteret til forholdet mellom to påfølgende Fibonaccitall H_n. Mer presist, når vi setter inn for likevekststilstanden $\bar{x} = 1$ og $\bar{u} = 1$ så kan

[2] *Denne erkjennelsen er utgangspunktet for Lucas kritikken, se Lucas (1976).*

[3] *Se for eksempel s. 89 i Ljungqvist og Sargent, (2004).*

[4] *Dette problemet kan skrives om til den mer generelle formuleringen (1)-(3) ved å sette (6) og (7) inn i kriteriefunksjonen til husholdningen. Optimeringsproblemet blir da å minimere* $-\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln(\gamma x_t^{\alpha} - u_t)$ *gitt (8) og (3), hvor minustegnet skyldes at vi omgjør problemet fra et maksimerings- til et minimeringsproblem.*

kontrollfunksjonen (5) skrives som (se ligning (14) i von Brasch mfl., 2012):

$$u_t = 1 + (1 - H_{2(T-t)})(x_t - 1). \tag{10}$$

Selv om rekken H er definert tidligere, så skriver vi den opp en gang til for å tydeliggjøre hva indeksen $2(T\text{-}t)$ indikerer

$H_n = 0$, **1,** .500, **.666…,** .600, **.625,** .615…, **.619…,** .617…, **.618…,** …

Slik indeksen er definert, ser vi at begynnelsen av rekken beskriver adferden når man nærmer seg endepunktet T. For eksempel, i den siste perioden man kan kontrollere systemet, $t = T-1$, vil rekkens verdi være $H_{2(T-t)} = H_2 = 1$. I den nest siste perioden, $t = T-2$, vil rekkens verdi være $H_{2(T-t)} = H_4 = .666....$, osv. To-tallet i indeksen sørger derfor for at man velger annet hvert tall i rekken (markert med fet skrift).

Hvorfor man ikke kan velge hvert tall i rekken H_n kan man få en intuitiv forståelse av ved å sammenligne tilpasningen til den representative husholdningen med hvordan rekken utvikler seg. Rekken har en hakkete utvikling. Først går den fra 0 og opp til 1, så ned til .5, derfra opp til .666…, og deretter ned til .600. Opp og ned, opp og ned! Ved å velge annethvert tall i rekken, fjernes denne hakkete utviklingen, og man står igjen med en rekke som starter på 1 og som utvikler seg i et jevnt mønster mot den inverse av det gylne snitt. Hvis en rekke skal tilknyttes tilpasningen til en representativ husholdning vil en naturlig egenskap være en jevn utvikling. Den representative husholdningen i Brock-Mirman modellen avveier å konsumere i dag mot å konsumere i fremtiden. Slik nyttefunksjonen er formulert, vil konsumet tilpasse seg jevnt over tid. Med andre ord, ved å velge annethvert tall i rekken H sørger vi for at vi får en ny rekke som ivaretar husholdningens ønske om å glatte konsumet over tid.

I Brock-Mirman eksempelet viste vi hvordan Fibonaccirekken var en del av den optimale kontrollfunksjonen. Det kom imidlertid ikke klart frem hvor generelt dette resultatet er. En åpenbar innvending er at kontrollfunksjonen (10) virker å være uavhengig av både kriteriefunksjonen og det økonomiske systemet. Den tar tilsynelatende ikke hensyn til hvordan «folk responderer på insentiver». Hvis det for eksempel skulle skje en endring i produksjonsteknologien i Brock-Mirman modellen, som følge av at parameteren γ endrer seg, vil dette påvirke den optimale kontrollfunksjonen.

For å koble Fibonaccirekken til økonomiske modeller mer generelt, må vi definere det vi kaller en generalisert Fibonaccirekke:

$$\tilde{F}_{n+2} = a\tilde{F}_{n+1} + b_{n+2}\tilde{F}_n, \tag{11}$$

med initialverdi $\tilde{F}_0 = 0$ og $\tilde{F}_1 = 1$. Parametrene a og b_{n+2} er i denne rekken koblet til de strukturelle parametrene i hele den økonomiske modellen. På denne måten tar den generelle Fibonaccirekken hensyn til hvordan den optimale kontrollfunksjonen endres hvis enten preferanser, teknologi eller andre deler av det økonomiske systemet skulle endres. Hvis vi definerer rekken av to påfølgende generaliserte Fibonaccitall $\tilde{H}_n = \tilde{F}_n/\tilde{F}_{n+1}$, kan den mer generelle kontrollfunksjonen (5), under noen forutsetninger, skrives:

$$u_t = \bar{u} - (\tilde{H}_{2(T-t)} + f_{\bar{u}\bar{u}}^{-1} f_{\bar{x}\bar{u}})(x_t - \bar{x}) \tag{12}$$

Her representerer for eksempel $f_{\bar{u}\bar{u}}$ verdien i likevektstilstanden til den dobbeltderiverte av kriteriefunksjonen f med hensyn på kontrollvariabelen. For mer generelle resultater og utdypninger, som for eksempel den eksplisitte løsningen av $\tilde{H}_{2(T-t)}$, henviser vi til von Brasch mfl. (2012).

FIBONACCIREKKEN SOM MÅLEINSTRUMENT

I dette avsnittet skal vi vise hvordan Fibonaccirekken kan kobles til det å teste økonomiske teorier med statistiske metoder – et fag Ragnar Frisch døpte *økonometri*. En økonometriker prøver å tallfeste økonomiske relasjoner. En utfordring økonometrikeren ofte står overfor er at økonomiske teorier gjerne forholder seg til størrelser som ikke direkte er målbare. Teknologiske endringer, trend-nivåer på produksjon og arbeidsledighet, institusjoner og risikopremier er alle eksempler på slike økonomiske størrelser som ikke kan måles direkte. For å kunne tallfeste slike størrelser, og deres innvirkning på økonomien, kan man bruke Kalmanfilteret. Denne statistiske metoden er oppkalt etter Rudolf E. Kalman, som utviklet filteret rundt 1960 (Kalman, 1960, Kalman og Bucy, 1961).

Koblingen mellom Kalmanfilteret og Fibonaccirekken illustreres best med et eksempel. Utgangspunktet er den naturlige arbeidsledighetsraten (U_t^n) og en sentralbank som styrer renten for å stabilisere inflasjonen. Den naturlige arbeidsledighetsraten er i denne sammenhengen definert som det nivået på arbeidsledighet som er forenlig med stabil inflasjon. Er for eksempel arbeidsledighetsraten lavere enn den naturlige arbeidsledighetsraten, vil det føre til prispress. Sentralbanken vil motvirke dette prispresset ved å sette en høyere rente enn normalt. Vi antar at det observerte arbeidsledighetsnivået (U_t) avviker tilfeldig fra det naturlige arbeidsledighetsnivået

$$(13) \qquad U_t = U_t^n + \varepsilon_t,$$

hvor ε_t er en normalfordelt variabel med forventning 0 og varians lik 1. For å kunne føre en optimal pengepolitikk er det nødvendig å ha et godt estimat på hva den naturlige arbeidsledighetsraten er. Hvis vi for eksempel visste at den naturlige arbeidsledighetsraten var konstant, så ville det beste estimatet på U^n være gjennomsnittet av de observerte ledighetstallene. Men hvis den naturlige arbeidsledighetsraten kan variere over tid, for eksempel som følge av tilbudssidesjokk som påvirker bedriftenes produksjonskapasitet på lang sikt, blir situasjonen noe mer kompleks. En modell for den naturlige arbeidsledighetsraten som tar høyde for slike sjokk er

$$(14) \qquad U_{t+1}^n = U_t^n + v_{t+1},$$

hvor v_{t+1} representerer tilbudssidesjokkene som har permanente effekter på den naturlige arbeidsledighetsraten og hvor initialverdien U_0^n er kjent. Vi antar for enkelthets skyld at tilbudssidesjokkene v_{t+1} er normalfordelte med forventning 0 og varians lik 1, samt at de er ukorrelerte med ε_t. Hvis vi ikke har observerte ledighetstall så følger det fra ligning (14) at vår beste gjetning på den naturlige arbeidsledighetsraten er initialverdien U_0^n. Men hvis vi har observert ledighetstall (U_t) fra og med år t = 0, hva er da vårt beste estimat på den naturlige arbeidsledighetsraten? Svaret er gitt ved

$$(15) \qquad \hat{U}_{t+1}^n = \hat{U}_t^n + H_{2t+1}(U_t - \hat{U}_t^n).$$

Beste gjetning på den naturlige ledighetsraten blir altså korrigert for avviket mellom observert ledighet og estimert naturlig ledighet. Viktigere: størrelsen på korrigeringen (H_{2t+1}) beskrives av Fibonaccitallene! Merk at i motsetning til i Brock-Mirman modellen, hvor begynnelsen av rekken H beskrev adferden nær endepunktet, beskriver begynnelsen av rekken H korreksjonsfaktoren i ligning (15) fra begynnelsen av observasjonsperioden t = 0. Selv om rekken H er definert to ganger tidligere, så skriver vi den opp enda en gang for å tydeliggjøre hva indeksen *2t+1* indikerer (markert med fet skrift)

$$H_n = \mathbf{0},\ 1,\ \mathbf{.500},\ .666\ldots,\ \mathbf{.600},\ .625,\ \mathbf{.615\ldots},\ .619\ldots,\ \mathbf{.617\ldots},\ .618\ldots,\ \ldots$$

I første periode, t = 0, vil rekkens verdi være H_1 = 0. Fra ligning (15) følger det at beste gjetning på den naturlige ledigheten i år 1 vil være lik initialverdien U_0^n. Dette kan forklares ut fra hvordan rekken av to påfølgende Fibonaccitall (H) avveier to former for usikkerhet. Når det er stor usikkerhet rundt informasjonsinnholdet i de observerte ledighetsratene, relativt til usikkerheten rundt nivået på den naturlige arbeidsledighetsraten, vil korreksjonsfaktoren være nær 0. Ettersom vi i første periode med sikkerhet vet initialverdien U_0^n vil ikke observasjonen av ledigheten U_0 i (13) gi oss noe ny informasjon om hva nivået på den naturlige ledigheten er.[5] Korreksjonsfaktoren blir da nøyaktig lik 0, og det beste estimatet er $\hat{U}_1^n = U_0^n$. Situasjonen i år *t=1* er annerledes. Et tilbudssidesjokk v_1 kan ha påvirket nivået på den naturlige ledigheten slik at estimatet $\hat{U}_1^n$ avviker fra det realiserte nivået U_1^n. Observasjonen av ledigheten U_1 i (13) vil i denne perioden inneholde verdifull informasjon om hva nivået på den naturlige ledigheten er. Økningen i nivået på korreksjonsfaktoren til H_3 = .5 gjenspeiler endringene i de to formene for usikkerhet: det har både vært en økning i usikkerheten rundt nivået på tilstandsvariabelen og en økning i informasjonsinnholdet i de observerte ledighetstallene. Etter hvert som tiden går vil denne utviklingen fortsette, og de observerte ledighetsratene vektlegges mer og mer. Korreksjonsfaktoren H_{2t+1} øker. Men økningen blir mindre og mindre jo flere observasjoner som tilkommer. Det finnes derfor en likevektssituasjon hvor forholdet mellom usikkerheten rundt nivået på tilstandsvariabelen og informasjonsinnholdet i de observerte ledighetstallene er konstant. Fra vår kunnskap om hvordan rekken H utvikler seg, så vet vi hva denne likevekten er: den inverse av det gylne snitt, $\phi^{-1} \approx .618$. Estimatoren for den naturlige ledighetsraten er i likevekt derfor gitt ved

$$(16) \qquad \hat{U}_{t+1}^n = \hat{U}_t^n + \phi^{-1}(U_t - \hat{U}_t^n).$$

Det er ikke tilfeldig at Fibonaccirekken går igjen i både optimale kontrollproblemer og i Kalmanfilteret. En meget viktig egenskap ved Kalmanfilteret, slik Rudolf Kalman selv beskriver i sin originale artikkel (Kalman, 1960), er at det er en dualitet mellom Kalmanfilteret og den lineære kontrollfunksjonen i ligning (5). Koblingen mellom Fibonaccirekken og Kalmanfilteret for mer generelle systemer enn eksempelet ovenfor kan derfor gjøres ved å bruke resultatene i Byström, mfl., 2010 og teoremet om dualitet.[6]

5 *Situasjonen hvor det er usikkerhet knyttet til initialverdien av tilstandsvariabelen er analysert i Benavoli mfl., 2009 og generaliseres ytterligere i Capponi mfl., 2010.*

6 *Se for eksempel s. 1031 i Ljungqvist og Sargent, 2004 for en innføring i denne dualiteten.*

AVSLUTNING

Fasinasjonen av Fibonaccirekken skyldes blant annet at den blir koblet til arkitektur, kunst, musikk samt en rekke fenomener i naturen. Vi har i denne artikkelen vist at den også kan kobles til økonomifaget på to måter. For det første kan Fibonaccirekken kobles til økonomisk teori ettersom den inngår i kontrollfunksjonen til et dynamisk optimeringsproblem på generell form. For det andre kan Fibonaccirekken kobles til økonometri da den inngår i metodene som brukes til å beskrive, teste og predikere den økonomiske virkeligheten gjennom koblingen til Kalmanfilteret.

REFERANSER

Benavoli, A., Chisci, L., og A. Farina (2009). Fibonacci sequence, golden section, Kalman filter and optimal control. *Signal Processing*, *89*(8), 1483–1488.

Brasch, T., Byström, J., og L. P. Lystad (2012). Optimal Control and the Fibonacci Sequence. *Journal of Optimization Theory and Applications, 154(3),* 857–878.

Byström, J., Lystad, L. P., og P.-O. Nyman (2010). Using Generalized Fibonacci Sequences for Solving the One-Dimensional LQR Problem and its Discrete-Time Riccati Equation. *Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin*, *31*(1), 1–18.

Capponi, A., Farina, A., og C. Pilotto (2010). Expressing stochastic filters via number sequences. *Signal Processing*, *90*(7), 2124–2132.

Castellanos, D. (1986). Rapidly converging expansions with Fibonacci coefficients. *Fibonacci Quarterly*, *24*, 70–82.

Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering, Transactions ASMA, Series D*, 82, 35–45.

Kalman, R. E. og R. S. Bucy (1961): New results in linear filtering and prediction theory, *Journal of Basic Engineering, Transactions ASMA, Series D*, 83, 95–108.

Levine, P., Pearlman, J., og R. Pierse (2008). Linear-quadratic approximation, external habit and targeting rules. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *32*(10), 3315–3349.

Ljungqvist, L., og T. J. Sargent (2004). *Recursive macroeconomic theory.* MIT Press.

Lucas, R. E. (1976). Econometric policy evaluation: a critique. *The Phillips Curve and Labor Markets*. Rochester conference series on public policy, New York: American Elsevier, pp. 19–46.

Weiss, H., og V. Weiss (2003). The golden mean as clock cycle of brain waves. *Chaos, Solitons & Fractals*, *18*(4), 643–652.

Yamagishi, M. E. B., og A. I. Shimabukuro (2007). Nucleotide Frequencies in Human Genome and Fibonacci Numbers. *Bulletin of Mathematical Biology*, *70*(3), 643–653.

ARTIKKEL

Rettelse under aktuell kommentar i Samfunnsøkonomene nr 1/2013

Beklageligvis har det blitt en feil Side 63, 1 .kolonne, 2 linjer over likning (7):
Det skal stå … δ er lik null og λ lik 1